МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского**

С.Ю. Городецкий

Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
института Информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2020

УДК 517.97
ББК В18:В161.81я73
Г-70

Г-70 Городецкий С.Ю. ЛЕКЦИИ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ И ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 51с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор **Д.В. Баландин**

Учебно-методическое пособие написано на основе текстов лекций, читаемых автором в институте Информационных технологий, математики и механики в рамках дисциплины «Методы оптимизации». Представлен материал по двум из шести разделов курса: вариационному исчислению и оптимальному управлению.

Пособие содержит сведения преимущественно теоретического характера: по методу вариаций, необходимым условиям оптимальности первого и второго порядков в простейших задачах вариационного исчисления, условиям оптимальности для изопериметроических задач; также представлены постановки задач оптимального управления и условия оптимальности для них в форме уравнения Р. Беллмана и принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов бакалавриата направления «Прикладная математика и информатика» (общий профиль).

УДК 517.97
ББК В18:В161.81я73

Предисловие

Учебно-методическое пособие написано на основе курса лекций по методам оптимизации, читаемого автором в институте Информационных технологий, математики и механики (ИИТММ) на направлении подготовки бакалавров «Прикладная математика и информатика» (общий профиль) (ПМИ).

Лекционный курс «Методы оптимизации» для ПМИ включает четыре раздела по нелицейной конечномерной оптимизации (нелинейное математическое программирование), а также два раздела, посвященных задачам бесконечномерной оптимизации: вариационному исчислению и оптимальному управлению. Лекционный материал этих двух последних разделов составляет содержание данного пособия.

Следует отметить, что весь материал читаемого курса издан в 2018 году в виде единого печатного учебного пособия «Лекции по методам нелинейной оптимизации» [1]. При этом разделы, посвященные конечномерным задачам, читаются автором в виде отдельной дисциплины «Методы оптимизации» еще и на направлении подготовки бакалавров «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Поэтому специально подготовленные для ПМИ лекции по разделам бесконечномерной оптимизации, оформленные в виде отдельного компактного электронного учебно-методического пособия представляются более удобными для студентов этого направления.

Изложение и иллюстративный материала пособия достаточно точно соответствуют тому, как они представлены на лекциях, однако материал сгруппирован не по лекциям, а по главам.

Способ изложения и подбор материала в пособии соответствуют тому относительно небольшому объему часов, которое отведено в общем курсе для изучения на лекциях теории по представленным в пособии разделам. Комплекты задач для практических занятий с примерами их решения включены в отдельное методическое издание [2].

Приведем краткий обзор содержания. Пособие включает две главы, посвященные бесконечномерным задачам оптимизации. Первая из них — вариационному исчислению, а вторая — оптимальному управлению. Заметим, что эти разделы не читаются на большинстве естественнонаучных направлений подготовки бакалавров, например, на направлениях «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная информатика» и «Программная инженерия». В курсе «Методы оптимизации» для ПМИ общего профиля эти разделы представлены, но на них отводится относительно небольшая доля времени.

Материал по вариационному исчислению излагается на примере простейших задач на классах гладких до второго порядка одномерных кривых с граничными условиями трех типов. Рассмотрение ограничивается выводом необходимых условий первого и второго порядков для этих задач, а также условий первого порядка в изопериметрической задаче. Остальные обобщения приведены без доказательств. Использована наиболее простая техника получения необходимых условий, основанная на использовании параметрических вариаций кривых. Специальный инструментарий функционального анализа, как, например, в [3], в изложении не применяется. Результаты этой главы используются в параллельно читаемом для направления ПМИ разделе курса «Теория управления», посвященном синтезу оптимальных регуляторов при отсутствии ограничений на значения управления.

Во второй главе в краткой форме изложены постановки задач оптимального управления с непрерывным временем. Для этих задач при отсутствии ограничений на значения управления получены дифференциальные уравнения Беллмана, используемые в курсе «Теория управления» для синтеза LQR–регуляторов. При наличии ограничений на значения управлений необходимые условия оптимальности записаны в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина, показана связь принципа максимума с дифференциальным уравнением Р. Беллмана. Рассмотрены условия оптимальности в форме принципа максимума для линейных задач на оптимальное быстродействие.

С.Ю. Городецкий

Глава 1. Методы вариационного исчисления

1.1. Общее представление о задачах вариационного исчисления

В данном пособии раздел, посвященный вариационному исчислению, относительно небольшой. Его учебный материал направлен на создание правильных представлений о характере задач вариационного исчисления , терминологии, основных результатах по необходимым условиям оптимальности на примере простых типов задач, а также одной из возможных техник получения этих результатов — методе вариаций Лагранжа.

Применение метода вариаций продемонстрировано на примере трех простейших типов задач вариационного исчисления, а также изопериметрической задаче. Приведены обобщения полученных результатов для задач некоторых других видов. Этот материал можно найти в следующих источниках: [4]-[9], а также их электронных версиях, которые можно получить, например, используя интернет-ресурс [10].

Вариационное исчисление является старым разделом математики. Известен точный год его рождения — 1696 г. В этом году Иоганн Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему с предложением для математиков своего времени заняться её решением. Это была задача о брахистохроне, в которой требовалось найти форму гладкой кривой, связывающей две заданные точки таким образом, чтобы материальная точка, двигаясь по этой кривой без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Свои подходы к решению этой задачи предложили Эйлер, Лагранж, Ньютон и сам И. Бернулли, что привело к рождению вариационного исчисления.

В общем случае в задачах вариационного исчисления задается класс D кривых или гиперповерхностей, описываемых функциями $x:\ G \subseteq R^n \to R^m$. Как правило, предполагается достаточная гладкость $x(s),\ s \in G$, а также накладываются некоторые дополнительные требования, в частности, на границе G. Далее на элементах $x(s)$ класса D определяется *интегральный функционал*

$$J[x] = \int_G F(s, x(s), \dots)ds, \tag{1.1}$$

подынтегральная функция которого может зависеть не только от s и $x(s)$, но и от производных $x(s)$ до некоторого порядка.

Задача заключается в определении $x^* \in D$ для которого

$$J[x^*] = \min_{x \in D} J[x], \tag{1.2}$$

если глобальный минимум существует, или в определении локального минимума, тип которого зависит от вводимого понятия близости элементов в D. Кроме задач на минимум могут рассматриваться задачи на максимум.

Замечания.
1. В (1.1) *определена зависимость* $J[x]$, *которая осуществляет отображение элементов из допустимого множества функций* D *в* R^1. *Тем самым,* $J[x]$ *является функцией, но поскольку аргумент этого отображения сам является функцией, то такое отображение называют функционалом.*
2. В задачах вариационного исчисления множества D *часто оказываются незамкнутыми, что может приводить к недостижимости* $\inf_{x\in D} J[x]$ *на классе допустимых кривых или поверхностей из* D.

Дальнейшее изложение нарочито не использует терминологию и приемы функционального анализа, поскольку преследует цель наиболее простого и понятного изложения основных подходов.

1.2. Простейшие задачи вариационного исчисления

В этих задачах элементы x зависят только от одного скалярного аргумента, т.е. $n = 1$, сами функции $x(t)$ также являются скалярными, т.е. $m = 1$, таким образом допустимые элементы x являются кривыми $x = x(t)$, $t \in G \subseteq R^1$.

Задача с фиксированными концами

Пусть $G = [t_0, t_1]$, а множество допустимых кривых D имеет вид, показанный на рис. 1.1, а именно:

$$D = D_1 = \left\{x : \ x \in C^2(G), \ x : G \to R^1, \ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1\right\}, \qquad (1.3)$$

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \qquad (1.4)$$

где функция F предполагается непрерывной вместе со своими частными производными до второго порядка по совокупности всех переменных.

Задача со свободными концами

Пусть $G = [t_0, t_1]$, множество допустимых кривых D имеет вид, показанный на рис. 1.2, а именно:

$$D = D_2 = \left\{x : \ x \in C^2(G), \ x : G \to R^1\right\}, \qquad (1.5)$$

функционал $J[x]$ имеет вид (1.4) с теми же требованиями к функции F, что и в предыдущей задаче. Как видно из (1.5) ограничений на значения кривой на

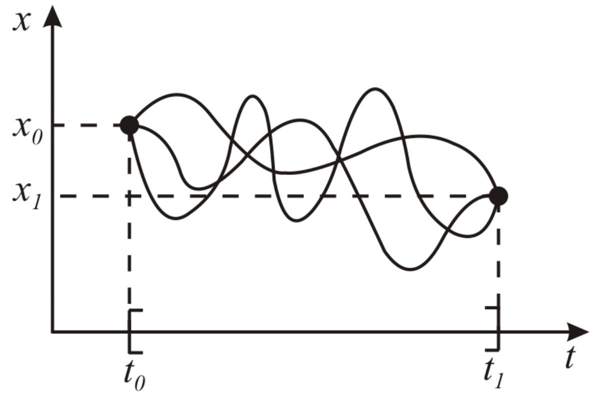

Рис. 1.1. Допустимые кривые в задаче с фиксированными концами

концах промежутка интегрирования, в отличие от задачи с фиксированными концами, не накладывается.

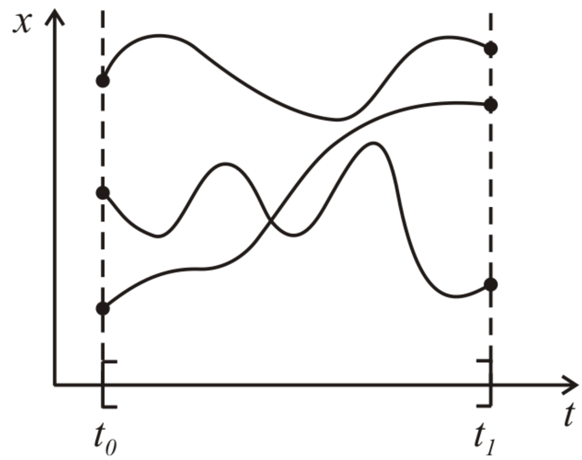

Рис. 1.2. Допустимые кривые в задаче со свободными концами

Задача со скользящими концами

Пусть $G = (-\infty, +\infty)$ и заданы граничные кривые, определяемые соотношениями

$$\Psi_i(x, t) = 0, \quad (i = 0, 1), \tag{1.6}$$

функции Ψ_i считаются достаточно гладкими по совокупности переменных.

Множество допустимых кривых D имеет вид (см. рис. 1.3):

$$\begin{aligned} D = D_3 = \big\{ & x:\ x \in C^2(G);\ x : G \to R^1;\ \exists t_i^x:\ \Psi_i(x(t_i^x), t_i^x) = 0, \\ & (i = 0, 1);\ \ \dot{x}(t_i^x) \neq -(\Psi'_{it}(x(t_i^x), t_i^x)/\Psi'_{ix}(x(t_i^x), t_i^x))\big\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$J[x] = \int_{t_0^x}^{t_1^x} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \tag{1.8}$$

где на функцию F накладываются прежние требования и $t_0^x < t_1^x$ — значения t, соответствующие пересечениям без касания кривой $x = x(t)$ с граничными кривыми (1.6).

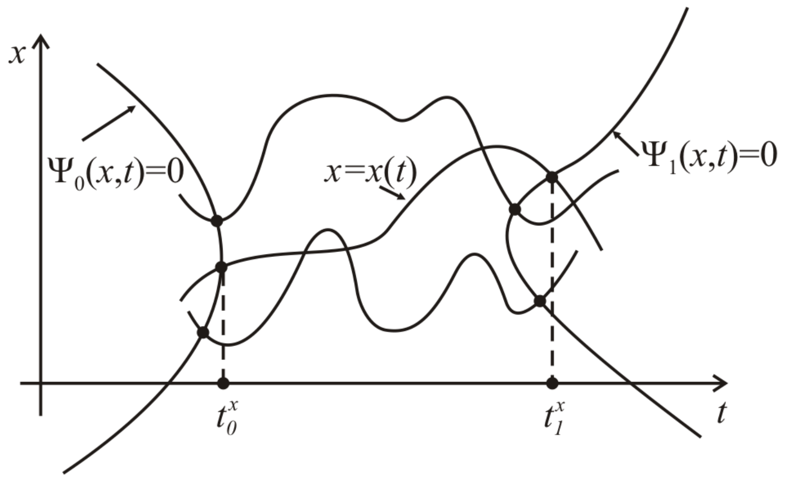

Рис. 1.3. Допустимые кривые в задаче со скользящими концами

Заметим,что в (1.8) пределы интегрирования зависят от кривой $x = x(t)$ и определяются ближайшими друг к другу точками её пересечения с граничными кривыми (1.6). Последнее условие в виде запрета равенства для производной $\dot{x}(t_i^x)$ в определении D_3 означает отсутствие касания кривой $x = x(t)$ с граничными кривыми в точках пересечения. Это требование необходимо для того, чтобы точка пересечения не исчезала при достаточно малом изменении кривой $x = x(t)$.

1.3. Слабый и сильный локальный минимумы в простейших задачах вариационного исчисления с фиксированными и свободными концами

Понятия сильного и слабого локальных минимумов рассмотрим на примере простейших задач первых двух типов. Можно обобщить вводимые ниже понятия и на задачи со скользящими концами, но в данном пособии этого сделано не будет с целью сохранения наибольшей простоты изложения.

Если в рассматриваемом линейном функциональном пространстве B, включающем множество допустимых кривых D, определить норму $\|x\|$ кривой $x = x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, то можно ввести *понятие расстояния между двумя кривыми* из B, определяемое как норма их разности. При этом линейное пространство B становится нормированным метрическим пространством.

Определение. *Локальным минимумом функционала* J из (1.4) на множестве кривых D из (1.3) или (1.5) пространства B назовем такую кривую

$x^o \in D$ для которой $\exists \varepsilon > 0$, что $\forall x \in D \cap O_\varepsilon(x^o)$ выполняется

$$J[x^o] \leqslant J[x],$$

где

$$O_\varepsilon(x^o) = \{x \in B: \ \|x^o - x\| \leqslant \varepsilon\}. \tag{1.9}$$

В зависимости от способа задания нормы можно получить различные трактовки понятия «локальный минимум».

Введем нормы двух типов.

Определение. Норму вида

$$\|x\|_0 = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|, \tag{1.10}$$

определенную на линейном пространстве непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций ($x \in C[t_0, t_1]$) назовем *нормой нулевого порядка.*

Определение. Норму вида

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)| + \max_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t)|, \tag{1.11}$$

определенную на линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[t_0, t_1]$ функций ($x \in C^1[t_0, t_1]$) назовем *нормой первого порядка.*

Аналогично можно ввести понятие нормы k-го порядка.

Заметим, что окрестность $O_\varepsilon(x^o)$ при $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$ является более «богатой», чем при $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, поскольку в первом случае эта окрестность содержит большее количество кривых. Например, все кривые вида

$$x_n(t) = \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n},$$

рассматриваемые на $[0, 1]$, при $n \geqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon}$ принадлежат ε-окрестности кривой $x^o(t) \equiv 0$ при $\varepsilon < 1$, если используется норма $\|\cdot\|_0$. Однако при любом n при использовании нормы первого порядка все эти кривые будут удалены от $x^o(t) \equiv 0$ на расстояние большее единицы: $\|x_n - x^o\|_1 > 1$, т.е. уже не будут входить в ε–окрестность этой кривой при использовании такой нормы, если $\varepsilon < 1$.

Определение. Локальный минимум, понимаемый в смысле нормы нулевого порядка из (1.10) называется *сильным локальным минимумом функционала*, а понимаемый в смысле нормы первого порядка из (1.11) — *слабым локальным минимумом.*

Заметим, что всякий сильный локальный минимум одновременно является и слабым, однако обратное неверно.

1.4. Метод вариаций Лагранжа, основная лемма вариационного исчисления

Метод вариаций был предложен Лагранжем в качестве техники вывода условий оптимальности в задачах вариационного исчисления. Заметим, что те же результаты могут быть получены другим путем, например, с использованием техник функционального анализа, основанных на обобщении понятия дифференцирования в функциональных пространствах (дифференцирование по Гато, Фреше).

Кратко изложим метод вариаций в его классической трактовке.

Пусть выделена некоторая допустимая кривая $\hat{x} \in D$. Определим для нее *класс пробных функций* $\mathfrak{M}(\hat{x})$:

$$\mathfrak{M}(\hat{x}) = \big\{\eta : \text{ где } \eta : G \to R^1 \text{ и } \forall \alpha \in R^1, \\ \text{если } |\alpha| - \text{достаточно мало, то } \hat{x} + \alpha \cdot \eta \in D\big\}. \quad (1.12)$$

Таким образом, при $\eta \in \mathfrak{M}(\hat{x})$ и достаточно малом по модулю α изменение кривой $\hat{x}(t)$ с помощью добавки $\alpha \cdot \eta(t)$ не выводит измененную кривую $\hat{x}+\alpha\cdot\eta$ из допустимого множества D.

Изменение, добавляемое к функции $\hat{x}$, называют *вариацией кривой* $\delta\hat{x}$. В нашем случае $\delta\hat{x} = \alpha \cdot \eta$. Кривую $x = \hat{x} + \delta\hat{x}$ называют *проварьированной кривой.*

При использовании параметрических вариаций вида $\delta\hat{x} = \alpha \cdot \eta$ значение функционала J на проварьированной кривой может быть рассмотрено как функция, зависящая от параметра вариации α:

$$Q(\alpha) = J[x + \alpha\eta]. \quad (1.13)$$

Сделанные ранее предположения о задаче позволяют представить приращение функционала при варьировании кривой в виде разложения:

$$J[x + \alpha\eta] - J[x] = Q'(0)\alpha + Q''(0)\frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2). \quad (1.14)$$

Определение. *Первой вариацией функционала* на кривой x в направлении пробной функции $\eta \in \mathfrak{M}(x)$ назовем главную линейную часть приращения функционала:

$$\delta_\eta J(x, \alpha) = Q'(0) \cdot \alpha. \quad (1.15)$$

Второй вариацией функционала назовем главную квадратичную часть его приращения:

$$\delta^2_{\eta\eta} J(x, \alpha) = Q''(0) \cdot \frac{\alpha^2}{2}. \quad (1.16)$$

Лемма. *Если x^o — локальный минимум функционала (слабый или сильный), то верно следующее:*

1) $\forall \eta \in \mathfrak{M}(x^o)$: $\delta_\eta J(x^o, \alpha) = 0$ — необходимое условие первого порядка;

2) $\forall \eta \in \mathfrak{M}(x^o)$: $\delta^2_{\eta\eta} J(x^o, \alpha) \geqslant 0$ — необходимое условие второго порядка.

Доказательство. Пусть это не так и первое утверждение неверно. Тогда найдется пробная функция $\hat{\eta} \in \mathfrak{M}(x^o)$, что $Q'(0) \neq 0$. Для определенности можно считать, что $Q'(0) < 0$. Тогда из (1.14) следует, что при любых достаточно малых значениях $\alpha > 0$ выполнится:

$$J[x^o + \alpha\hat{\eta}] < J[x^o].$$

Однако

$$\|x^o + \alpha\hat{\eta} - x^o\|_1 = \alpha\|\eta\|_1 \to 0$$

при $\alpha \to 0$, что означает принадлежность кривой $x^o + \alpha\hat{\eta}$ любой слабой окрестности x^o при достаточно малом α. Это противоречит слабой оптимальности кривой x^o. Таким образом, первое утверждение доказано для слабого локального минимума. Однако, поскольку сильный локальный минимум одновременно является слабым, то утверждение 1 справедливо и для сильного локального минимума.

Аналогично доказывается второе утверждение. □

Следствие. *Утверждения леммы можно представить в более конструктивной форме:*

1. *необходимым условием первого порядка для локального экстремума (минимума или максимума) на кривой $x^o \in D$ является обращение в ноль производной $Q'(0) = 0$ для всякой пробной функции $\eta \in \mathfrak{M}(x^o)$;*
2. *необходимым условием второго порядка для локального минимума (максимума) на кривой $x^o \in D$ является сохранение следующего знака второй производной: $Q''(0) \geqslant \ (\leqslant)\ 0$ для всякой пробной функции $\eta \in \mathfrak{M}(x^o)$.*

Заметим, что эти условия необходимы для слабого локального минимума, а значит и для сильного.

Определение. *Экстремалями функционала J (стационарными кривыми)* называют такие допустимые кривые $\bar{x} \in D$ для которых

$$\forall \eta \in \mathfrak{M}(\bar{x}) : \ \delta_\eta J(\bar{x}, \alpha) = 0.$$

Понятие экстремали для функционала является аналогом понятия «стационарная точка» для функции.

Следует обратить внимание на то, что для экстремалей обращение в ноль первой вариации должно происходить именно для всех пробных функций.

Замечание. *Множество экстремалей функционала может включать кривые, на которых достигаются экстремумы: минимум и максимум, а также стационарные кривые, не являющиеся экстремумами. Таким образом, все решения задачи вариационного исчисления содержатся в множестве экстремалей.*

Полученные необходимые условия экстремума пока ещё не имеют конструктивных форм представления. В получении таких форм ключевую роль играет следующая лемма.

Лемма (основная — Лагранжа)**.** *Пусть $f(t) \in C[t_0, t_1]$, т.е. f — непрерывна на отрезке, и*

$$\mathfrak{M} = \left\{\eta : \ \eta \in C^k[t_0, t_1], \ (k \geqslant 2), \ \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0\right\}.$$

Если при этом $\forall \eta \in \mathfrak{M}$:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)dt = 0,$$

то $f(t) \equiv 0$ для $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Пусть утверждение неверно, т.е. $\exists \bar{t} \in [t_0, t_1]$, что $f(\bar{t}) = c \neq 0$ (не ограничивая общности будем считать, что $c > 0$). При этом (из непрерывности f) следует, что такое $\bar{t}$ найдется и в (t_0, t_1). Тогда существует δ–окрестность $\bar{t}$ в которой $f(t) > c/2$.

Построим функцию $\bar{\eta}(t)$, гладкую до порядка $k \geqslant 2$, чтобы

$$\bar{\eta}(t) = \begin{cases} 1, \ t \in O_{\delta/2}(\bar{t}), \\ 0, \ t \notin O_{\delta}(\bar{t}), \end{cases}$$

и при этом была обеспечена неотрицательность $\bar{\eta}(t)$ для всех значений аргумента (см. рис. 1.4). Построенная функция $\bar{\eta}(t) \in \mathfrak{M}$.

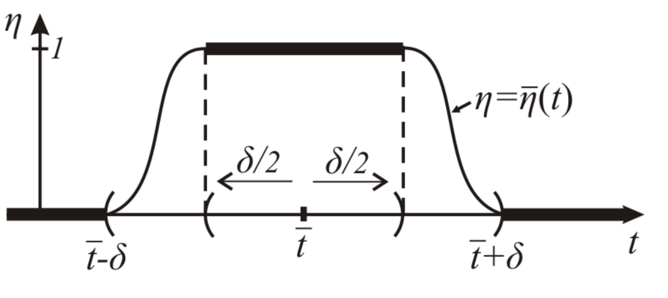

Рис. 1.4. Специальная пробная функция

Справедливы оценки

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\bar{\eta}(t)dt = \int_{O_{\delta(\bar{t})}} f(t)\bar{\eta}(t)dt \geqslant c/2 \int_{O_{\delta/2(\bar{t})}} \bar{\eta}(t)dt = \frac{c}{2}\delta > 0.$$

Возникшее противоречие доказывает, что лемма верна.

□

1.5. Вычисление первой вариации функционала в простейших задачах вариационного исчисления

1.5.1. Вычисление первой вариации в задаче со скользящими концами

Введем необходимые обозначения. Пусть $t_i(\alpha)$ — значение t, при котором происходит пересечение кривой $x = x(t)+\alpha\eta(t)$ с граничной кривой $\Psi_i(x,t) = 0$, а (t_i, x_i) — координаты точки пересечения при $\alpha = 0$, т.е. $t_i = t_i(0)$, $x_i = x(t_i(0))$. Кроме того, используем обозначения: $\dot{x}_i = \dot{x}(t_i(0))$ и $t'_{i\alpha} = \frac{dt_i(\alpha)}{d\alpha}|_{\alpha=0}$.

При малых α для точки пересечения (см. рис. 1.5) имеет место тождество:

$$\Psi_i(x(t_i(\alpha)) + \alpha\eta(t_i(\alpha)),\ t_i(\alpha)) \equiv 0. \tag{1.17}$$

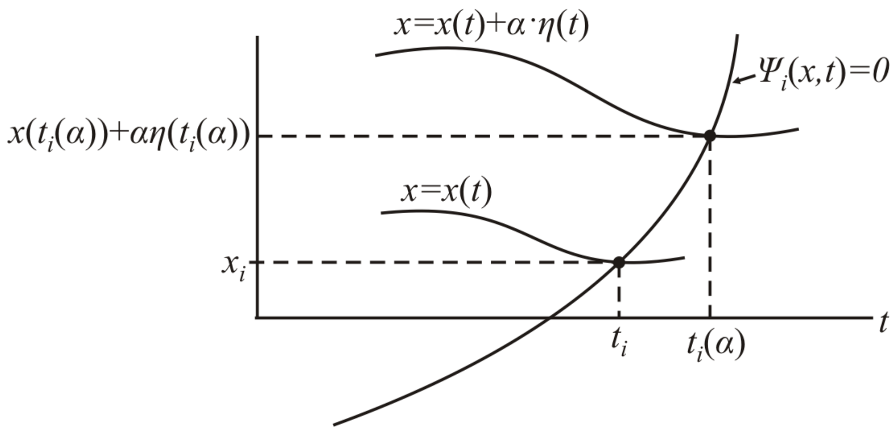

Рис. 1.5. Зависимость точки пересечения проварьированной кривой от α

Вычисляя полную производную по α от тождества (1.17) и полагая в результате дифференцирования $\alpha = 0$, получим:

$$\Psi'_{ix}(x_i, t_i) \cdot (\dot{x}_i \cdot t'_{i\alpha} + \eta(t_i)) + \Psi'_{it}(x_i, t_i) \cdot t'_{i\alpha} = 0$$

или

$$t'_{i\alpha} = -\frac{\Psi'_{ix}(x_i, t_i)}{\Psi'_{it}(x_i, t_i) + \dot{x}_i \Psi'_{ix}(x_i, t_i)} \cdot \eta(t_i).$$

Значение первой вариации из (1.15) характеризуется значением $Q'(0)$. Поскольку в задаче со скользящими концами пределы интегрирования в (1.8) зависят от кривой $x(t)$, то на проварьированной кривой

$$\frac{dQ(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} F(t, x(t) + \alpha\eta(t), \dot{x}(t) + \alpha \cdot \dot{\eta}(t))dt\right). \tag{1.18}$$

Используя правила дифференцирования по параметру интеграла, в котором пределы интегрирования зависят от параметра, получим:

$$Q'(0) = \left\{\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} F(t, x(t) + \alpha\eta(t), \dot{x}(t) + \alpha \cdot \dot{\eta}(t))dt\right\}\Big|_{\alpha=0} + \\ + F(t_i, x_i, \dot{x}_i) \cdot t'_{i\alpha}\Big|_{i=0}^{i=1}. \tag{1.19}$$

Поскольку производная под знаком интеграла может быть представлена в виде

$$F'_x(t, x(t), \dot{x}(t))\eta(t) + F'_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{\eta}(t) = \\ = F'_x(t, x(t), \dot{x}(t))\eta(t) + \frac{d}{dt}\left(F'_{\dot{x}}(\dots)\eta(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(F'_{\dot{x}}(\dots)\right)\eta(t),$$

где многоточие заменяет набор параметров: $t, x(t), \dot{x}(t)$, то окончательно из (1.19) получим:

$$Q'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(F'_x(\dots) - \frac{d}{dt}(F'_{\dot{x}}(\dots))\right)\eta(t)dt + \\ + \left[F'_{\dot{x}}(t_i, x_i, \dot{x}_i) - \frac{\Psi'_{ix}(x_i, t_i)F(t_i, x_i, \dot{x}_i)}{\Psi'_{it}(x_i, t_i) + \dot{x}_i\Psi'_{ix}(x_i, t_i)}\right]\eta(t_i)\Big|_{i=0}^{i=1}. \tag{1.20}$$

1.5.2. Вид первой вариации в задачах со свободными и фиксированными концами

В задаче со свободными концами пределы интегрирования в (1.18) не зависят от α, поэтому в (1.19) для этого случая получим $t'_{i\alpha} = 0$, следовательно:

$$Q'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(F'_x(\dots) - \frac{d}{dt}(F'_{\dot{x}}(\dots))\right)\eta(t)dt + \\ + F'_{\dot{x}}(t_1, x_1, \dot{x}_1)\eta(t_1) - F'_{\dot{x}}(t_0, x_0, \dot{x}_0)\eta(t_0). \tag{1.21}$$

В задаче с фиксированными концами из (1.3) и (1.12) следует, что $\forall\alpha$: $x(t_i) + \alpha\eta(t_i) = x_i$, следовательно, в задачах этого типа $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$.

Таким образом, при фиксированных значениях кривой в точках t_0 и t_1 получаем наиболее простую форму для производной

$$Q'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(F'_x(\dots) - \frac{d}{dt}(F'_{\dot{x}}(\dots))\right)\eta(t)dt. \tag{1.22}$$

1.6. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в простейших задачах вариационного исчисления

1.6.1. Вывод условий оптимальности первого порядка

Основные результаты представлены в виде трех теорем.

Теорема 1 (условия оптимальности первого порядка для задачи с закрепленными концами)**.** *Для того, чтобы в задаче с закрепленными концами кривая $x = x^*(t) \in C^2[t_0, t_1]$ являлась экстремалью функционала (1.4) необходимо и достаточно, а для того, чтобы она являлась экстремумом (минимумом или максимумом) необходимо, чтобы функция $x = x^*(t)$:*

1) являлась решением дифференциального уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\right) = 0; \tag{1.23}$$

2) удовлетворяла граничным условиям

$$x^*(t_i) = x_i, \quad (i = 0, 1). \tag{1.24}$$

Доказательство. Покажем вначале, что указанные условия необходимы и достаточны для того, чтобы $x = x^*(t)$ была экстремалью.

Пусть выполнены граничные условия (1.24) тогда из определения класса пробных функций следует, что $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. Это приводит к тому, что производная $Q'(0)$ имеет вид (1.22). Если $x = x^*(t)$ является решением (1.23), то на этой кривой интеграл в (1.22) будет обращаться в ноль для любой пробной функции $\eta(t)$. Следовательно x^* — экстремаль.

Пусть теперь x^* — экстремаль. Следовательно, эта кривая допустима, что означает, в частности, выполнение условий (1.24). Кроме того, из определения экстремали следует, что при подстановке $x = x^*(t)$ в (1.22) интеграл будет принимать значения равные нулю $\forall \eta \in \mathfrak{M}(x^*)$. Однако функции η соответствуют требованиям основной леммы при $k = 2$, а выражение, стоящее под интегралом в качестве множителя перед $\eta(t)$, является непрерывным по переменной t. Применяя для нашего случая основную лемму вариационного исчисления видим, что множитель перед $\eta(t)$ в (1.22) равен нулю при подстановке $x = x^*(t)$.

Таким образом, функция x^* удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера (1.23).

Покажем теперь необходимость выполнения (1.23)-(1.24) для кривой, являющейся экстремумом. Если $x = x^*(t)$ — экстремум, то кривая $x^*(t)$ должна принадлежать множеству допустимых кривых D_1 из (1.3). Следовательно для $x^*(t)$ выполняются граничные условия (1.24). Кроме того, всякий экстремум является экстремалью, а следовательно, $x = x^*(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера. $\square$

Теорема 2 (условия оптимальности первого порядка для задачи со свободными концами). *Для того, чтобы в задаче со свободными концами кривая $x = x^*(t) \in C^2[t_0, t_1]$ являлась экстремалью функционала* (1.4) *необходимо и достаточно, а для того, чтобы $x = x^*(t)$ являлась экстремумом (минимумом или максимумом) только необходимо, чтобы функция $x = x^*(t)$:*

1) являлась решением дифференциального уравнения Эйлера (1.23)*;*

2) удовлетворяла так называемым естественным граничным условиям

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i)) = 0, \quad (i = 0, 1). \tag{1.25}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 нужно провести рассуждения почти также, как при доказательстве теоремы 1.

Существенные различия возникают только при обосновании необходимости выполнения пунктов 1 и 2 утверждения теоремы для обеспечения обращения в ноль производной $Q'(0)$ для всякой допустимой пробной функции. Проведем эту часть доказательства.

Итак, пусть $\forall \eta \in \mathfrak{M}(x^*)$ в (1.21) $Q'(0) = 0$. Распорядимся произволом в выборе пробных функций. Вначале рассмотрим только такие всевозможные функции η из $\mathfrak{M}(x^*)$ для которых $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. Тогда мы попадаем в область применимости основной леммы, из которой вытекает, что при $x = x^*(t)$ множитель при $\eta(t)$ в интеграле (1.21) обращается в ноль. Таким образом, функция $x^*(t)$ является решением уравнения Эйлера.

Заметим, что это свойство $x^*(t)$ имеет место вне зависимости от вида $\eta(t)$ и поэтому оно сохранится и в том случае, когда значения $\eta(t_i)$ $(i = 0, 1)$ будут отличны от нуля. Таким образом, показано, что $\forall \eta \in \mathfrak{M}(x^*)$ при $x = x^*(t)$

$$Q'(0) = F'_{\dot{x}}(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))\eta(t_1) - F'_{\dot{x}}(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))\eta(t_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь подкласс пробных функций, для которых $\eta(t_0) = 0$, а $\eta(t_1)$ — может быть произвольно. Отсюда $\forall \eta(t_1): \ F'_{\dot{x}}(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))\eta(t_1) = 0$. Следовательно, выполнено (1.25) при $i = 1$.

Аналогичное рассуждение с $\eta(t_1) = 0$ и произвольным $\eta(t_0)$ показывает, что (1.25) верно и для $i = 0$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3 (условия оптимальности первого порядка в задаче со скользящими концами). *Для того, чтобы в задаче со скользящими концами кривая $x = x^*(t) \in C^2[t_0, t_1]$, имеющая неособые пересечения с граничными кривыми, была экстремалью необходимо и достаточно, а для того, чтобы*

$x = x^*(t)$ являлась экстремумом в этой задаче (минимумом или максимумом) только необходимо, чтобы функция $x = x^*(t)$:

1) являлась решением дифференциального уравнения Эйлера (1.23)*;*

2) выполнялись так называемые граничные условия трансверсальности:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_i, x_i, \dot{x}_i) - \frac{\Psi'_{ix}(x_i, t_i) F(t_i, x_i, \dot{x}_i)}{\Psi'_{it}(x_i, t_i) + \dot{x}_i \Psi'_{ix}(x_i, t_i)} = 0, \tag{1.26}$$

для (i=0,1).

Доказательство. Заметим, что выражения (1.20) для первой вариации (точнее, для $Q'(0)$) в задаче со скользящими концами отличается от соответствующего выражения (1.21) в задаче со свободными концами только видом множителей перед $\eta(t_1)$ и $\eta(t_0)$ в обынтегрированной части выражений. Следовательно, можно повторить все рассуждения из доказательства теоремы 2, но только применительно к выражению (1.20).

Получим тот же результат, но с заменой естественных граничных условий на условия трансверсальности.

Теорема доказана. □

Замечание. *Естественные граничные условия можно рассматривать как частный случай условий трансверсальности, получаемый при $\Psi'_{ix}(t_i, x_i) = 0$, за счет того, что задачу со свободными концами можно рассматривать как задачу со скользящими концами, если принять $\Psi_i(t, x) = t - t_i$.*

1.6.2. Геометрический смысл условия трансверсальности

Заметим, что вектор, составленный из частных производных Ψ'_{it}, Ψ'_{ix}, вычисленных в точке (t_i, x_i^*) пересечения экстремали $x = x^*(t)$ с i-й граничной кривой, образуют вектор нормали $\vec{N}$ к этой кривой в данной точке. Этот вектор определяет локальную ориентацию этой кривой.

Далее выражение (1.26) можно представить в виде

$$f(t_i, x_i^*, \dot{x}_i^*, \vec{N}(t_i, x_i^*)) = 0.$$

Его можно рассматривать как уравнение относительно $\dot{x}_i^*$ при заданной точке пересечения (t_i, x_i^*). Значение $\dot{x}_i^*$ определяет тангенс угла наклона касательной к экстремали $x = x^*(t)$ в точке её пересечения с граничной кривой. *Таким образом, условие трансверсальности определяет (необязательно однозначно) поле допустимых ориентаций для экстремалей при пересечении ими граничной кривой, взаимосвязанное с локальной ориентацией самой граничной кривой в точках пересечения.* Это иллюстрирует рис. 1.6.

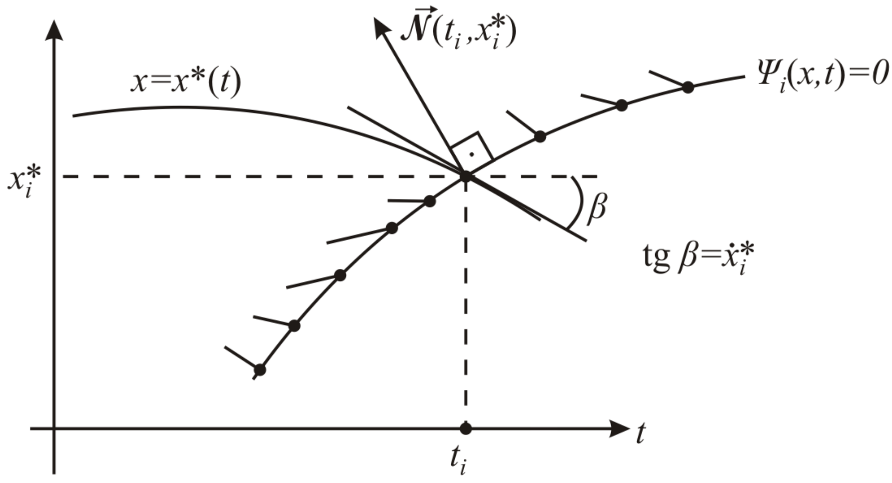

Рис. 1.6. Условие трансверсальности определяет возможные ориентации касательных к экстремали в точках ее пересечения с граничной кривой

1.6.3. Уравнение Эйлера и его первые интегралы

Уравнение Эйлера (1.23) является дифференциальным уравнением второго порядка относительно x. Его можно записать в явной форме:

$$F''_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x})\ddot{x} + F''_{\dot{x}x}(t,x,\dot{x})\dot{x} + F''_{\dot{x}t}(t,x,\dot{x}) - F'_x(t,x,\dot{x}) = 0. \qquad (1.27)$$

В общем случае решение этого уравнения зависит от двух произвольных постоянных, которые определяются из двух граничных условий.

Можно выделить несколько случаев, когда данное уравнение имеет первый интеграл.

Случай 1 (подынтегральная функция F не зависит от $\dot{x}$)**.** *При $F = F(t,x)$ уравнение Эйлера не является дифференциальным уравнением, принимая вид $F'_x(t,x) = 0$. Это соотношение непосредственно определяет неявную форму описания кривой $x(t)$.*

Случай 2 (подынтегральная функция F не зависит от x)**.** *При $F = F(t,\dot{x})$ уравнение Эйлера имеет первый интеграл*

$$F'_{\dot{x}}(t,\dot{x}) = C. \qquad (1.28)$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из того, что $F'_x(t,\dot{x}) = 0$ и, следовательно, уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(F'_{\dot{x}}(t,\dot{x})\right) = 0.$$

□

Случай 3 (подынтегральная функция F не зависит от t)**.** *При $F = F(x, \dot{x})$ уравнение Эйлера имеет первый интеграл*

$$F'_{\dot{x}}(x, \dot{x})\dot{x} - F(x, \dot{x}) = C. \tag{1.29}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае явная форма записи (1.27) примет вид:

$$F''_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x})\ddot{x} + F''_{\dot{x}x}(x, \dot{x})\dot{x} - F'_x(x, \dot{x}) = 0.$$

Если это равенство умножить на $\dot{x}$, а также прибавить и вычесть слева $F'_{\dot{x}}(x, \dot{x})\ddot{x}$, то его левую часть можно будет представить в виде полной производной по t:

$$\frac{d}{dt}\left(F'_{\dot{x}}(x, \dot{x})\dot{x} - F(x, \dot{x})\right) = 0.$$

Отсюда непосредственно получаем (1.29). □

Пример. Рассмотрим в качестве примера задачу о поиске в классе дважды непрерывно дифференцируемых кривых, соединяющих точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$, кривой $x = x(t)$, минимизирующей функционал $J[x] = \int_0^1 (\dot{x}(t))^2 dt$.

В этом примере $F = F(\dot{x})$, поэтому существует первый интеграл $F'_{\dot{x}}(\dot{x}) = C$. В нашем случае отсюда имеем $2\dot{x} = C$, откуда $x(t) = at + b$. Из краевых условий находим $a = 1,\ b = 0$.

Таким образом, существует единственная экстремаль $x^*(t) = t$. Обеспечивает ли она минимум функционала? В общем случае условия первого порядка не дают ответа на этот вопрос и его нужно исследовать отдельно. Однако в нашем случае при $x^*(t) = t$ $J[x^*] = 1$. Любая допустимая вариация кривой $\delta x(t)$ не должна смещать граничные значения, т.е. $\delta x(0) = \delta x(1) = 0$. В то же время,

$$J[x^* + \delta x] = \int_0^1 (1 + \dot{\delta} x)^2 dt = 1 + 2\int_0^1 \dot{\delta} x(t) dt + \int_0^1 (\dot{\delta} x(t))^2 dt.$$

Однако $\int_0^1 \dot{\delta} x(t) dt = \delta x(1) - \delta x(0) = 0 - 0 = 0$, а при $\delta \dot{x}(t)$, не равном нулю тождественно, $\int_0^1 (\dot{\delta} x(t))^2 dt > 0$. Таким образом, $J[x^* + \delta x] \geqslant J[x^*]$, что означает оптимальность $x^*(t) = t$.

1.6.4. Негладкие экстремали. Условия Вейерштрасса–Эрдмана

Заметим, что интегральные функционалы (1.4), (1.8) в рассматриваемых задачах вариационного исчисления зависят от значений функции $x(t)$ и её первой производной, но не зависят от $\ddot{x}(t)$. Таким образом, значения функционалов $J[x]$ могут быть рассмотрены на расширенном классе допустимых кривых. Для этого в определениях допустимых множеств D в (1.3), (1.5), (1.7) заменим требование $x \in C^2(G)$ более слабым предположением. А именно, будем считать, что $x = x(t)$ непрерывны на G и имеют кусочно-непрерывную первую производную. При этом по прежнему будем требовать, чтобы подынтегральная функция $F(t, x, \dot{x})$ имела непрерывные частные производные до второго порядка по всем своим аргументам.

В этом случае можно применить прежнюю технику метода вариаций и проанализировать условия на кривую $x = x(t)$, при выполнении которых $\delta_\eta J(x, \alpha) = 0$ для всевозможных пробных функций с определенными требованиями гладкости. Основной вопрос заключается в том, должна ли полученная при расширенном классе допустимости экстремаль удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера? При этом следует учесть, что, как видно из записи уравнения Эйлера в явной форме (1.27), уравнение Эйлера является уравнением второго порядка, если $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \neq 0$. В той части пространства переменных $t, x, \dot{x}$, где $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 0$, уравнение Эйлера становится уравнением первого порядка.

Ответ на поставленный вопрос дает теорема Дюбуа–Реймона [4].

Теорема (Дюбуа–Реймона)**.** *Пусть первая вариация $\delta_\eta J(x, \alpha)$ интегрального функционала*

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

обращается в ноль на некоторой непрерывной и имеющей кусочно-непрерывную производную функции $x = x^*(t)$, для любой пробной функции $\eta(t)$, обращающейся в ноль на концах интервала $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющей тем же требованиям непрерывности, что и кривая $x = x^*(t)$. Если при этом $F(t, x, \dot{x})$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка по свои аргументам и вдоль кривой $x = x^*(t)$ выполняется условие $F''_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$, то функция $x^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера (1.23) *и является дважды непрерывно дифференцируемой.*

(Приводится без доказательства).

Из теоремы вытекает следующее полезное наблюдение.

Следствие. *В рассматриваемых задачах экстремали могут иметь изломы (т.е. разрывы производных) только в областях, где $F''_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 0$.*

Если экстремаль $x = x(t)$ имеет излом в точке $\bar{t}$, $\bar{x} = x(\bar{t})$, то возникает естественный вопрос о взаимосвязи значений её производных слева и справа от точки $\bar{t}$.

Соответствующие условия называются *условиями Вейерштрасса–Эрдмана.* Они утверждают, что в точке излома должны выполняться следующие требования склейки:

$$\begin{aligned}
&F'_{\dot{x}}(\bar{t}, x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t}-0)) = F'_{\dot{x}}(\bar{t}, x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t}+0));\\
&F'_{\dot{x}}(\bar{t}, x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t}-0))\dot{x}(\bar{t}-0) - F(\bar{t}, x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t}-0)) =\\
&= F'_{\dot{x}}(\bar{t}, x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t}+0))\dot{x}(\bar{t}+0) - F(\bar{t}, x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t}+0)).
\end{aligned} \tag{1.30}$$

1.6.5. Необходимые условия Лежандра минимума (максимума) функционала

Теорема (Лежандра). *Пусть $x = x(t)$ — экстремаль функционала $J[x]$ в одной из простейших задач вариационного исчисления из п.1.2. Для того, чтобы $x(t)$ являлась минимумом (максимумом) функционала, необходимо, чтобы*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad F''_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \geqslant (\leqslant) 0. \tag{1.31}$$

Доказательство. Проведем его для случая минимума функционала. Вычислим вторую вариацию функционала на подклассе тех пробных функций $\eta \in \mathfrak{M}(x)$, для которых $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. Тогда вне зависимости от конкретного типа задачи при вариациях кривой концы промежутка интегрирования t_0 и t_1 не будут зависеть от параметра α варьирования кривой. Поэтому

$$Q''(0) = \int_{t_0}^{t_1} (F''_{xx}\eta^2(t) + 2F''_{x\dot{x}}\eta(t)\dot{\eta}(t) + F''_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}^2(t))dt. \tag{1.32}$$

Предположим, что утверждение теоремы неверное, т.е. $\exists \bar{t} \in [t_0, t_1]$, что для экстремали $x = x(t)$ $F''_{\dot{x}\dot{x}}(\bar{t}, x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t})) < 0$. Из непрерывности $F''_{\dot{x}\dot{x}}$ следует, что такое $\bar{t}$ найдется также и в открытом промежутке, т.е. можно считать $\bar{t} \in (t_0, t_1)$.

Выберем функцию $\eta(t)$ согласно рис. 1.7, дополнительно обеспечив её сглаживание до второго порядка в ε–окрестностях точек излома при значениях $0 < \varepsilon \ll \delta$.

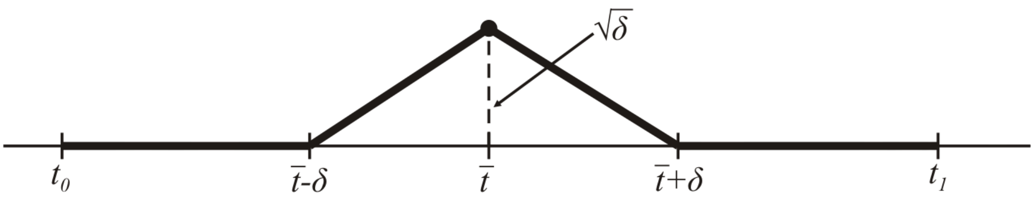

Рис. 1.7. Специальный вид пробной функции $\eta(t)$ перед сглаживанием

Интеграл (1.32) сведется к интегралу на $[\bar{t}-\delta-\varepsilon, \bar{t}+\delta+\varepsilon]$. Первоначально разобьем его на пять интегралов: два — по участкам линейности $[\bar{t}-\delta+\varepsilon, \bar{t}-\varepsilon]$ и $[\bar{t}+\varepsilon, \bar{t}+\delta-\varepsilon]$, а также три — по ε–окрестностям точек $\bar{t}$ и $\bar{t}\pm\delta$. Затем ε устремим к нулю, интегралы по двум участкам линейности вновь объединим, после чего интеграл разделим на три интеграла от трех членов в сумме под знаком интеграла в (1.32). Первые два интеграла оцениваются сверху.

На этой стадии получим:

$$Q''(0) \leqslant \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} |F''_{xx}|\,\eta^2(t)dt + 2\int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} |F''_{x\dot{x}}|\,|\eta(t)|\,|\dot{\eta}(t)|\,dt + \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} F''_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}^2(t)dt.$$

Используя теорему о среднем, а также то, что для $t \in (\bar{t}-\delta, \bar{t}) \cup (\bar{t}, \bar{t}+\delta)$ справедливы соотношения:

$$\eta^2 \leqslant (\sqrt{\delta})^2 = \delta, \quad |\eta(t)|\,|\dot{\eta}(t)| \leqslant \sqrt{\delta}\frac{1}{\sqrt{\delta}} = 1, \; \dot{\eta}^2(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^2,$$

получим следующую оценку

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q''(0) \leqslant 2\delta \left|F''_{xx}(\tilde{t}, x(\tilde{t}), \dot{x}(\tilde{t}))\right| \cdot \delta + 4\delta \left|F''_{x\dot{x}}(\hat{t}, x(\hat{t}), \dot{x}(\hat{t}))\right| \cdot 1 + \\ + 2\delta F''_{\dot{x}\dot{x}}(\xi, x(\xi), \dot{x}(\xi)) \cdot \frac{1}{\delta}, \quad (1.33)$$

где $\tilde{t}$, $\hat{t}$ и ξ — некоторые точки из δ–окрестности $\bar{t}$. Устремляя δ к нулю получим

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} Q''(0) \leqslant F''_{\dot{x}\dot{x}}(\bar{t}, x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t})) < 0.$$

Однако, необходимым условием минимума на экстремали $x = x(t)$ является $Q''(0) \geqslant 0$, что противоречит полученной оценке.

Доказательство проведено для случая минимума функционала. В случае максимума доказательство проводится аналогично. □

1.7. Обобщения уравнения Эйлера

Рассмотрим функционал, зависящий от пространственной кривой $x = x(t) \in R^n$

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)dt,$$

где F имеет непрерывные частные производные до второго порядка по всем аргументам.

Теорема (условия оптимальности первого порядка для задачи относительно пространственной кривой). *Для того, чтобы кривая $x = x(t) \in C^2[t_0, t_1]$, удовлетворяющая заданным краевым условиям $x(t_i) = x^i$ $(i = 0, 1)$, являлась локальным экстремумом функционала $J[x]$ необходимо, чтобы $x = x(t)$ удовлетворяла системе дифференциальных уравнений Эйлера*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0, \\ (i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

(Приводится без доказательства).

Теперь рассмотрим случай, когда для гладкой до $(m+1)$-го порядка скалярной функции $x = x(t)$ подынтегральная функция зависит от производных функции x до порядка $m > 1$, т.е.

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) dt,$$

где F имеет непрерывные частные производные до второго порядка по всем аргументам.

Теорема (условия оптимальности первого порядка в форме уравнения Эйлера–Пуассона). *Для того, чтобы кривая $x = x(t) \in C^{m+1}[t_0, t_1]$, удовлетворяющая краевым условиям $x(t_i) = x_0^i$, $x^{(1)}(t_i) = x_1^i, \dots, x^{(m-1)}(t_i) = x_{m-1}^i$, являлась экстремумом функционала $J[x]$, она должна являться решением дифференциального уравнений Эйлера–Пуассона*

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(1)}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(2)}}\right) - \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(m)}}\right) = 0.$$

(Приводится без доказательства).

Приведенные в этом разделе результаты *рекомендуется доказать самостоятельно в качестве упражнения.*

1.8. Вариационные задачи на условный экстремум

В задачах вариационного исчисления на допустимые кривые могут быть наложены дополнительные ограничения, приводящие задачу к форме задачи на условный экстремум. Дополнительные ограничения могут носить различный характер: иметь вид накладываемых дифференциальных связей, заключаться в требовании фиксации определенного значения некоторого дополнительного функционала, состоять в требовании принадлежности кривой заданному гладкому многообразию и т.д.

Рассмотрим несколько видов таких задач.

1.8.1. Изопериметрические задачи

Рассмотрим множество кривых $x \in D_1$ из (1.3). Зададим на D_1 два функционала:

$$J_0[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt, \tag{1.34}$$

$$J_1[x] = \int_{t_0}^{t_1} h(t, x, \dot{x}) dt, \tag{1.35}$$

где F и h имеют непрерывные частные производные до второго порядка по своим аргументам.

Изопериметрическая задача состоит в определении кривых, обеспечивающих

$$\min_{x \in D} J_0[x] \tag{1.36}$$

на множестве допустимых кривых D, являющимся подмножеством D_1 с дополнительным требованием в форме изопериметрического функционального ограничения–равенства:

$$D = \left\{ x \in C^2[t_0, t_1] :\ x(t_i) = x^i \ (i = 0, 1), J_1[x] = c \right\}. \tag{1.37}$$

Поскольку концы кривых в задаче (1.36)-(1.37) фиксированы, при варьировании кривых должны быть использованы функции, добавление которых не смещает концы варьируемой кривой. Исходя из этого введем класс пробных функций

$$\mathfrak{M} = \left\{ \eta \in C^2[t_0, t_1] :\ \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0 \right\},$$

зафиксируем кривую $x(t)$ и построим ее проварьированный вариант $\tilde{x}(t)$, полученный с помощью сразу двух пробных функций $\eta_i \in \mathfrak{M},\ (i = 1, 2)$:

$$\tilde{x} = x + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2.$$

Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$. Пусть

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, \dot{x} + \alpha_1 \dot{\eta}_1 + \alpha_2 \dot{\eta}_2) dt, \tag{1.38}$$

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{t_0}^{t_1} h(t, x + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, \dot{x} + \alpha_1 \dot{\eta}_1 + \alpha_2 \dot{\eta}_2) dt. \tag{1.39}$$

Поскольку по условиям задачи $J_1[x] = c$, то значения α_1 и α_2 должны быть такими, чтобы

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = c. \tag{1.40}$$

Заметим, что наличие дополнительной связи (1.40) объясняет необходимость использования двух пробных функций при варьировании кривой. При использовании одной пробной функции единственный параметр α_1, который входил бы в связь (1.40), полностью фиксировался бы этой связью.

Очевидно, что если $x = x(t)$ определяет локальный минимум в исходной изопериметрической задаче, то точка $(0, 0)$ должна являться точкой локального минимума функции $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ при ограничении (1.40), т.е.

$$Q(0, 0) = \min_{H(\alpha_1, \alpha_2) = c} Q(\alpha_1, \alpha_2). \tag{1.41}$$

В свою очередь, необходимое условие локального минимума в точке $(0,0)$ для задачи (1.41) может быть записано через теорему Лагранжа:
$\exists\ (\lambda_0^*, \lambda_1^*) \neq 0$, что

$$\lambda_0^* \nabla Q(0,0) + \lambda_1^* \nabla H(0,0) = 0. \tag{1.42}$$

Условие $H(0,0) = c$ добавлять не нужно, поскольку точка $(0,0)$ заведомо допустима для (1.41) в силу того, что варьируемая кривая $x = x(t)$ является допустимой в исходной задаче.

Условие (1.42) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\lambda_0^* Q(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda_1^* H(\alpha_1, \alpha_2)\right) |_{(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)} = 0, \\ (i = 1, 2), \end{cases}$$

где по аналогии с (1.22) имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i}(0,0) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[F'_x(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt} F'_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]}_{A} \eta_i(t)\ dt, \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}(0,0) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[h'_x(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt} h'_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]}_{B} \eta_i(t)\ dt. \tag{1.44}$$

Таким образом, чтобы в изопериметрической задаче на $x = x(t)$ достигался локальный минимум необходимо, чтобы $\forall \eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{M}$, $\exists\ (\lambda_0^*, \lambda_1^*) \neq 0$, что

$$\begin{cases} \lambda_0^* \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} [A] \eta_i(t)\ dt + \lambda_1^* \int_{t_0}^{t_1} [B] \eta_i(t)\ dt = 0, \\ (i = 1, 2). \end{cases} \tag{1.45}$$

Заметим, что множители λ_0^* и λ_1^* могут зависеть от пробных функций η_1 и η_2, поскольку функции $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ и $H(\alpha_1, \alpha_2)$ задачи (1.41) зависят от η_1 и η_2. Возможная зависимость множителей Лагранжа от пробных функций не позволяет непосредственно применить к условиям (1.45) основную лемму вариационного исчисления, чтобы получить необходимое условие оптимальности, аналогичное уравнению Эйлера (1.23). Несмотря на это можно обосновать следующий результат.

Теорема (необходимое условие оптимальности в изопериметрической задаче). *Для того, чтобы кривая $x = x(t)$ являлась локальным экстремумом изопериметрической задачи* (1.36)-(1.37) *необходимо, чтобы нашелся нетривиальный набор констант: $(\lambda_0^*, \lambda_1^*) \neq 0$, при котором $x = x(t)$ — будет являться экстремалью на классе кривых D_1 из* (1.3) *функционала*

$$\tilde{J}[x] = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\lambda_0^* F(t,x,\dot{x}) + \lambda_1^* h(t,x,\dot{x})\right)}_{L(\lambda_0^*, \lambda_1^*, t, x, \dot{x})}\ dt, \tag{1.46}$$

подынтегральная функция которого $L(\lambda_0^*, \lambda_1^*, t, x, \dot{x})$ является аналогом функции Лагранжа. Таким образом, при некотором наборе $(\lambda_0^*, \lambda_1^*) \neq 0$ кривая $x = x(t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\lambda_0^*, \lambda_1^*, t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\lambda_0^*, \lambda_1^*, t, x, \dot{x})\right) = 0 \tag{1.47}$$

при краевых условиях $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$ и соблюдении изопериметрического условия $J_1[x] = c$.

Доказательство. Воспользуемся результатами приведенного выше анализа и рассмотрим полученное необходимое условие (1.45). Рассмотрим три логически возможных случая.

Случай 1: допустимая кривая $x = x(t)$ является экстремалью функционала $J_1[x]$ на классе кривых D_1 из (1.3). Тогда $\forall \eta_i \in \mathfrak{M}$: $\int_{t_0}^{t_1} [B]\eta_i(t)\, dt = 0$. Выбирая $\lambda_0^* = 0, \lambda_1^* = 1$ удовлетворим условию (1.45), а также (1.47).

Случай 2: допустимая кривая $x = x(t)$ из D является экстремалью функционала $J[x]$ на классе кривых D_1 из (1.3), т.е. без учета требования $J_1[x] = c$.

В этом случае $\forall \eta_i \in \mathfrak{M}$: $\int_{t_0}^{t_1} [A]\eta_i(t)\, dt = 0$. Выбирая $\lambda_0^* \neq 0, \lambda_1^* = 0$ мы удовлетворим условию (1.45) и (1.47).

Случай 3: допустимая кривая $x = x(t)$ не является экстремалью функционалов $J[x]$, $J_1[x]$, рассматриваемых отдельно.

Таким образом, найдутся $\eta \in \mathfrak{M}$ для которых $\int_{t_0}^{t_1} [B]\eta(t)\, dt \neq 0$. При выборе η_1, η_2 такого типа в задаче (1.41) $\nabla H(0,0) \neq 0$, что обеспечивает выполнение достаточного условия регулярности допустимого множества задачи (1.41) в точке $(0,0)$. При этом $\lambda_0^* \neq 0$ и равенства (1.45) можно разделить на λ_0^*, введя $\lambda^* = \lambda_1^*/\lambda_0^*$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left([A] + \lambda^*[B]\right) \eta_1(t)\, dt = 0, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left([A] + \lambda^*[B]\right) \eta_2(t)\, dt = 0. \end{cases} \tag{1.48}$$

Во втором равенстве λ^* может зависеть только от η_2, но с учетом того, что $\int_{t_0}^{t_1} [B]\eta_1(t)\, dt \neq 0$, изменения λ^* привели бы к нарушению первого равенства в (1.48). Таким образом, значение λ^*, равное отношению множителей Лагранжа, не зависит от η_2. Аналогично можно показать. что оно не зависит и от η_1.

Заметим, что если теперь рассмотреть первое из уравнений (1.48) на подклассе пробных функций, обращающих интеграл $\int_{t_0}^{t_1} [B]\eta(t)\, dt$ в ноль, то на этом подклассе сам интеграл в (1.48) не зависит от λ^*. Следовательно, в (1.48) λ^* можно принять константой при любых выборах $\eta_1 \in \mathfrak{M}$.

Применяя теперь основную лемму вариационного исчисления, приходим к выполнению (1.47) при $\lambda_0^* = 1$, $\lambda_1^* = \lambda^*$. Теорема доказана. $\square$

1.8.2. Задачи с дополнительными дифференциальными связями

В этих задачах, называемых *задачами Лагранжа*, функционал $J[x]$ определяется пространственной кривой $x = x(t) \in R^n$, причем сами эти кривые порождаются заданной системой дифференциальных уравнений, определяющей накладываемые дополнительные дифференциальные связи. Задачи такого вида часто возникают в теории управления при построении оптимальных регуляторов.

Задача ставится следующим образом. На классе D достаточно гладких на $[t_0, t_1]$ кривых, удовлетворяющих заданным граничным условиям $x(t_0) = x^0 \in \in R^n$, $x(t_1) = x^1 \in R^n$, а также дополнительной системе дифференциальных условий связи (такие связи в механике называют *неголономными*):

$$\begin{cases} f_j(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0, \\ (j = 1, \ldots m)\ , \end{cases} \tag{1.49}$$

где $m < n$, требуется найти минимум (максимум) функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\, dt. \tag{1.50}$$

Теорема (о необходимых условиях экстремума в задаче с дифференциальными связями)**.** *Для того, чтобы допустимая кривая $x = x(t) \in D$ являлась экстремумом функционала* (1.50) *при ограничениях* (1.49) *необходимо, чтобы нашлись функции $\lambda_j = \lambda_j^*(t)$, являющиеся множителями Лагранжа, при которых $x = x(t)$, обеспечивает безусловный экстремум функционала*

$$\tilde{J}[x, \lambda] = \int_{t_0}^{t_1} \left(F(t, x_1, .., x_n, \dot{x}_1, .., \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(t, x_1, .., x_n, \dot{x}_1, .., \dot{x}_n) \right) dt$$

при выполнении граничных условий $x(t_i) = x^i$, $(i = 0, 1)$.

(Приводится без доказательства).
Заметим, что функция

$$L(\lambda, t, x, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(t, x, \dot{x})$$

выполняет роль функции Лагранжа.

Следствие. *Необходимые условия экстремума в задаче с дифференциальными связями, записанные в конструктивной форме имеют следующий вид:*

1) *пара* $x = x(t)$ *и* $\lambda = \lambda^*(t)$ *должна являться решением обобщенной системы уравнений Эйлера с присоединенными условиями дифференциальных связей*
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0, \ (i = 1, \ldots, n), \\ f_j(t, x, \dot{x}) = 0, \ (j = 1, \ldots m) \, . \end{cases}$$
2) *должны быть выполнены граничные условия* $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Глава 2. Оптимальное управление

2.1. Постановка задачи

Задана динамическая система с управлением, описываемая системой дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x, u(t)), \\ (i = 1, \dots, n), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ — состояние динамической системы,
$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ — управление. Функции $f_i(x, u)$ и их частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, u)$ — непрерывны по совокупности переменных, что, в силу теоремы Коши–Пикара, обеспечивает существование и единственность решения системы (2.1). Кроме того, заданы: $x(0) = x^0$ — начальное состояние, x^1 — требуемое конечное состояние.

Считается, что управления $u(t)$, рассматриваемые как функции времени, выбираются из *множества допустимых управлений* D, которое включает кусочно-непрерывные, непрерывные справа вектор-функции $u(t)$, принимающие значения на заданном *множестве* $V \subseteq R^m$ *допустимых значений управления*. Таким образом, $D = D(V)$ является множеством в функциональном пространстве. Обычно в задачах оптимального управления множество V — ограничено и замкнуто, т.е. является компактом.

Поясним термин «кусочно-непрерывная функция».

Определение. Функция $u(t)$ называется *кусочно-непрерывной* на некотором промежутке времени, если на любом конечном подынтервале этого промежутка она имеет не более, чем конечное число точек разрыва.

Пример возможного поведения одной из компонент допустимого управления $u_i(t)$ показан на рис.2.1.

Определение. Множество $X_U \subseteq R^n$ называется *множеством управляемости* в целевую точку x^1 для динамической системы (2.1) при множестве допустимых управлений $D(V)$, если $\forall x^0 \in X_U$ существует допустимое управление $u \in D(V)$, переводящее систему (2.1) из начального состояния $x(0) = x^0$ в заданное конечное x^1 за некоторое конечное время T.

Определение. Множество состояний динамической системы $X_N = R^n \backslash X_U$, не принадлежащих множеству управляемости, называется *множеством неуправляемости.*

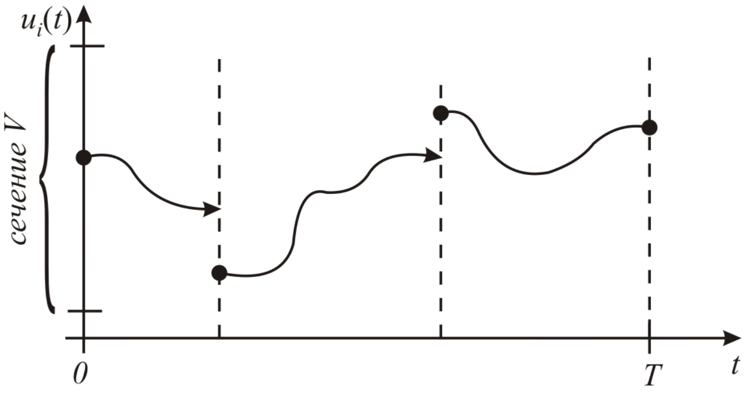

Рис. 2.1. Пример поведения управления $u_i = u_i(t)$ для $u \in D(V)$, $V = [a, b] \subseteq R^m$

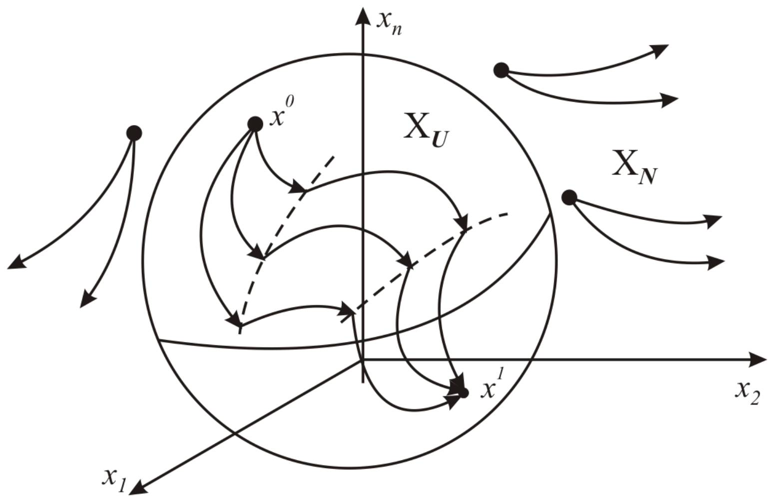

Рис. 2.2. Множества управляемости и неуправляемости

Для начальных точек $x(0) = x^0$ из множества неуправляемости X_N невозможно за конечное время перевести систему в состояние x^1, используя допустимые управления из $D(V)$.

Введем функционал качества

$$J[u] = \int_0^T f_0(x(t), u(t))\, dt, \tag{2.2}$$

где $f_0(x, u)$ и $\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(x, u)$ — непрерывны по совокупности переменных. Момент времени T не задан, а определяется как момент первого достижения цели: $x(T) = x^1$, а $\forall t \in [0, T)$ $x(t) \neq x^1$. Подынтегральную функцию $f_0(x, u)$ можно трактовать, как функцию мгновенных затрат.

Задача оптимального управления заключается в том, чтобы для $x^0 \in$ $\in X_U$ определить допустимое управление $u^* \in D = D(V)$, минимизирующее целевой функционал:

$$J[u^*] = \min_{\substack{u \in D(V) \\ u\colon x^0 \to x^1 \\ \text{за конечное T}}} J[u]. \tag{2.3}$$

Управление $u^*(t)$ и соответствующая ему в силу системы (2.1) *траектория* $x^*(t)$, $t \in [0, T]$ называются *оптимальными.*

Математическая теория оптимальных процессов была разработана группой математиков под руководством Л. С. Понтрягина в конце 50-х годов XX столетия [11].

2.2. Уравнение Беллмана для задач оптимального управления

Покажем, что при выполнении некоторых дополнительных предположений оптимальное управление, рассматриваемое как функция текущего состояния $u = u^*(x)$, удовлетворяет уравнению специального вида — уравнению Беллмана. Дополнительные предположения сформулируем в форме гипотез.

Гипотеза 1. *Для всякого начального состояния x^0 из области управляемости X_u существует оптимальное значение стоимости (в смысле значений функционала $J[u]$) перехода из x^0 в x^1 за конечное время при использовании допустимых управлений.*

Функцией Беллмана $S(x^0)$ называют функцию оптимальной стоимости допустимого перехода в зависимости от начального состояния. Это определение полностью согласуется с ранее введенным в разделе «Динамическое программирование» понятием функции Беллмана. Для дальнейшего изложения удобно ввести переобозначение $S(x^0) = (-\omega(x^0))$.

Для вывода уравнения, следуя [12], рассмотрим два способа перехода из x^0 в x^1, показанные на рис. 2.3: $(a - b - c)$ и $(a - d - e)$. При этом $(a - b - c)$ — оптимальный переход из x^0; t — произвольный момент времени из интервала $(0,\ T)$; (d) — переход под воздействием произвольного допустимого управления $\tilde{u}(\xi)$, $\xi \in [t, t_1]$, где t_1 — промежуточный момент времени из интервала $(t,\ T)$; (e) — оптимальный переход из $\tilde{x}(t_1)$ в x^1.

Используя принцип Беллмана в форме необходимого условия для участков $(b - c)$ и (c), можно утверждать, что затраты на этих участках оптимальны по отношению к состояниям $x^*(t)$ и $x^*(t_1)$ и, следовательно, равны $(-\omega(x^*(t)))$ и $(-\omega(x^*(t_1)))$. Таким образом,

$$(-\omega(x^*(t))) = \int_t^{t_1} f_0(x^*(\xi), u^*(\xi))\, d\xi + (-\omega(x^*(t_1))). \tag{2.4}$$

Поскольку затраты на оптимальном участке $(b - c)$ меньше или равны затрат на неоптимальном пути $(d - e)$, то справедливо неравенство

$$(-\omega(x^*(t))) \leqslant \int_t^{t_1} f_0(\tilde{x}(\xi), \tilde{u}(\xi))\, d\xi + (-\omega(\tilde{x}(t_1))). \tag{2.5}$$

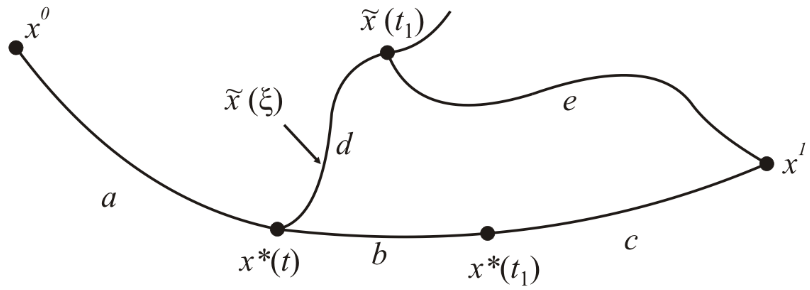

Рис. 2.3. Два способа перехода в x^1:$(a - b - c)$ и $(a - d - e)$

После произвольного выбора управления $\tilde{u}(\xi)$ за счет уменьшения значения t_1 можно добиться, чтобы на $[t, t_1]$ функция $\tilde{u}(\xi)$ была непрерывна. Тогда по теореме о среднем найдется $\theta_1 \in [t, t_1]$, что

$$\int_t^{t_1} f_0(\tilde{x}(\xi), \tilde{u}(\xi))\, d\xi = f_0(\tilde{x}(\theta_1), \tilde{u}(\theta_1)) \cdot (t_1 - t).$$

Аналогично можно представить интеграл по участку (b). Учитывая, что $x^*(t) = \tilde{x}(t)$, соотношения (2.4)-(2.5) можно представить в виде

$$\frac{\omega(x^*(t_1)) - \omega(x^*(t))}{t_1 - t} = f_0(x^*(\theta_1), u^*(\theta_1)), \tag{2.6}$$

$$\frac{\omega(\tilde{x}(t_1)) - \omega(\tilde{x}(t))}{t_1 - t} \leqslant f_0(\tilde{x}(\theta_2), \tilde{u}(\theta_2)) \tag{2.7}$$

при некоторых $\theta_1, \theta_2 \in [t, t_1]$.

Гипотеза 2. *Функция Беллмана $(-\omega(x))$ непрерывно дифференцируема по x в X_U.*

Используя непрерывную дифференцируемость функции $\omega(x)$ при $t_1 \to t$ из (2.7) имеем

$$\frac{d}{dt}\omega(\tilde{x}(t)) \leqslant f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)). \tag{2.8}$$

При вычислении полной производной нужно учесть, что в силу (2.1) $\dot{\tilde{x}}_i = f_i(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$. Обозначая $v = \tilde{u}(t)$ — произвольное значение из V, а также учитывая, что $\tilde{x}(t) = x^*(t)$, можно записать (2.8) в виде:

$$\forall v \in V : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x^*(t)) \cdot f_i(x^*(t), v) \leqslant f_0(x^*(t), v). \tag{2.9}$$

Выполняя аналогичные преобразования с равенством (2.6), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x^*(t)) \cdot f_i(x^*(t), u^*(t)) = f_0(x^*(t), u^*(t)). \tag{2.10}$$

Сопоставляя два соотношения, а также учитывая, что всякая точка $x \in$ $\in X_U$ может рассматриваться как точка некоторой оптимальной траектории $x^*(t)$, приходим к уравнению Беллмана:

$$\forall x \in X_U: \max_{u \in V} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)\ f_i(x, u) - f_0(x, u) \right\} = 0. \tag{2.11}$$

Его следует рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции $\omega(x)$. Определив функцию Беллмана, из (2.11) можно для каждого x определить оптимальное значение $u^*(x)$. Тем самым, получено условие, определяющее оптимальный регулятор $u = u^*(x)$, формирующий оптимальное управляющее воздействие в зависимости от текущего состояния x управляемой системы.

2.3. Запись условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина

Приведем упрощенный вывод принципа максимума Понтрягина Л.С. на основе уравнения Беллмана, приняв две дополнительные гипотезы.

Можно показать, что в действительности в задачах оптимального управления гипотезы о гладкости функции Беллмана могут не выполняться при $V \neq R^m$. Однако это не приводит к тому, что принцип максимума становится неверным. Просто для его строгого обоснования следует использовать другой математический аппарат [11].

Выберем некоторое $\lambda \geqslant 0$ и умножим обе части соотношений (2.9)-(2.10) на λ. Введем следующие обозначения. Пусть

$$\psi_0^* = -\lambda,\ \psi_i^*(t) = -\lambda \left(\frac{\partial(-\omega(x^*(t)))}{\partial x_i} \right), \tag{2.12}$$

$(i = 1, \ldots, n)$. Тогда вектор $\bar{\psi}^*(t) = (\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t))^T$ пропорционален вектору антиградиента функции Беллмана, вычисляемому вдоль оптимальной траектории $x^*(t)$:

$$\bar{\psi}^*(t) = -\lambda \cdot \nabla_x(-\omega(x)) \Big|_{x = x^*(t)}. \tag{2.13}$$

Введем специальную функцию

$$H(\psi_0, \bar{\psi}, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x, u), \tag{2.14}$$

которая в задачах оптимального управления выполняет ту же роль, что и функция Лагранжа в задачах математического программирования.

Функцию (2.14) в задачах оптимального управления называют *функцией Гамильтона*. Далее будет показано, что это название действительно отражает её роль в этих задачах.

Для сокращения записи будем использовать расширенный вектор $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)^T$, тогда функцию Гамильтона можно представить в более компактном виде

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x, u). \tag{2.15}$$

Используя выражение (2.15), а также (2.12), соотношения (2.9)-(2.10) можно представить в виде:

$$\forall v \in V : \; H(\psi^*(t), x^*(t), v) \leqslant 0, \tag{2.16}$$

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0 \tag{2.17}$$

для $t \in [0, T]$.
Таким образом, $\forall t \in [0, T]$

$$0 \equiv H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in V} H(\psi^*(t), x^*(t), v). \tag{2.18}$$

Однако, в этом соотношении значение вектора $\psi^*(t)$ выражено через неизвестную функцию Беллмана в силу (2.12). Необходимо найти уравнения, позволяющие определять компоненты $\psi^*(t)$ вне зависимости от функции Беллмана.

Рассмотрим функцию

$$B(x, u) = -\lambda f_0(x, u) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} f_j(x, u). \tag{2.19}$$

Поскольку (в силу гипотезы 1) любая точка области управляемости $x \in X_u$ может рассматриваться как точка некоторой оптимальной траектории, то из (2.9) следует, что

$$\forall x \in X_U, \; \forall v \in V : \; B(x, v) \leqslant 0.$$

В частности, если принять $v = u^*(t)$, то

$$\forall x \in X_U : \; B(x, u^*(t)) \leqslant 0.$$

Однако при $x = x^*(t)$ из (2.10) следует, что

$$B(x^*(t), u^*(t)) = 0.$$

Таким образом, приходим к выводу, что точки $x^*(t)$ оптимальной траектории таковы, что

$$x^*(t) = \arg\max_{x \in X_U} B(x, u^*(t)). \tag{2.20}$$

Примем еще две гипотезы.

Гипотеза 3. *Множество управляемости X_U открыто.*

Гипотеза 4. *Функция Беллмана $S(x) = -\omega(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой.*

При справедливости этих гипотез из (2.20) следует, что

$$\nabla_x B(x^*(t), u^*(t)) \equiv 0.$$

В явной форме это условие даст:

$$-\lambda \frac{\partial f_0(x^*(t), u^*(t))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_i}(x^*(t))\ f_j(x^*(t), u^*(t)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x_j}(x^*(t))\ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t)) = 0,\ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.21}$$

Вычислим полную производную по времени $\dot{\psi}_i^*(t)$ в силу системы (2.1), используя (2.12):

$$\dot{\psi}_i^*(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda \frac{\partial^2 \omega(x^*(t))}{\partial x_i \partial x_j}\ f_j(x^*(t), u^*(t)). \tag{2.22}$$

Замечая, что вторые производные функции $\omega(x)$, вычисляемые в (2.21) и (2.22) в различной последовательности, совпадают в силу гипотезы 4, из (2.21) и (2.12) получим, что

$$\dot{\psi}_i^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)),\ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.23}$$

Таким образом, найдена система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $\psi_i^*(t)$.

Собирая вместе ряд установленных соотношений: (2.18), (2.23) приходим к записи условий оптимальности в задачах оптимального управления в форме принципа максимума Понтрягина.

Теорема (принцип максимума Л.С. Понтрягина). *Пусть начальное состояние $x(0) = x^0$ системы (2.1) принадлежит области управляемости, т.е. $x^0 \in X_U$, и $u = u^*$ — допустимое управление ($u^* \in D(V)$), переводящее систему из состояния x^0 в заданное конечное состояние x^1 за конечное время (обозначим его T). Тогда для того, чтобы управление $u = u^*(t)$ и соответствующая ему траектория $x = x^*(t)$ были оптимальными, необходимо, чтобы:*

1. *$\exists \psi^*(t) = (\psi_0^*(t), \psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t))^T \neq 0$ — нетривиальный вектор сопряженных переменных, $t \in [0, T]$, где $\psi_0^*(t) = const = \psi_0^* \leqslant 0$, а компоненты $\psi_i = \psi_i^*(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ вектора $\bar{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^T$ являются решением сопряженной системы, соответствующей $u^*(t), x^*(t)$:*

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(\psi_0^*, \bar{\psi}, x^*(t), u^*(t)), \\ (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{2.24}$$

2. *$\forall t \in [0, T]$ выполнялось условие максимума*

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in V} H(\psi^*(t), x^*(t), v). \tag{2.25}$$

3. *В конечный момент времени T*

$$H(\psi^*(T), x^*(T), u^*(T)) = 0. \tag{2.26}$$

Оказывается также, что для $t \in [0, T]$

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = const, \tag{2.27}$$

что позволяет выполнить проверку условия (2.26) *не обязательно в момент времени T, а в любой момент $t \in [0, T]$.*

Точное доказательство можно найти в [11], [12].

Рассуждения, приведенные перед формулировкой теоремы, показывают связь условий принципа максимума с уравнением Беллмана.

Дополнительно покажем, что использование функции $H(\cdot)$ позволяет записать расширенную систему уравнений динамики, а также систему для сопряженных переменных ψ_i в форме гамильтоновой системы, что и определяет название функции $H(\cdot)$

Действительно, введем дополнительную переменную x_0 таким образом, чтобы

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u(t)) \tag{2.28}$$

при начальном условии $x_0(0) = 0$. Тогда значение функционала (2.2) примет вид $J[u] = x_0(T)$.

Если ввести расширенный вектор $x \in R^{n+1}$:

$$x^T := (x_0, x^T_{\text{стар.}}),$$

и определить граничные условия для этого расширенного вектора:

$$x^T(0) = (0, x^0_{\text{стар.}})^T;\ x^T(T) \in \left\{(z, (x^1_{\text{стар.}})^T) :\ z \in R^1\right\},$$

то систему уравнений для $x \in R^{n+1}$, $\psi \in R^{n+1}$ можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = +\dfrac{\partial H(\psi, x, u(t))}{\partial \psi_i},\ (i = 0, 1, \ldots, n), \\ \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H(\psi, x, u(t))}{\partial x_i},\ (i = 0, 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{2.29}$$

При постоянстве значений управления из вида системы (2.29) непосредственно следовало бы постоянство функции Гамильтона вдоль любой фазовой траектории $(x(t), \psi(t))$ этой системы. Оказывается, что это свойство сохраняется и для значений $u(t) = u^*(t)$ изменяющихся во времени при условии, что $u^*(t)$ удовлетворяет условию максимума (2.25).

2.4. Линейные задачи на оптимальное быстродействие

2.4.1. Постановка

Рассмотрим линейную динамическую систему с управлением вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \tag{2.30}$$

где A и B — постоянные матрицы $(n \times n)$ и $(n \times m)$. Управление $u(\cdot)$ принадлежит определенному ранее классу допустимых управлений $D = D(V)$, однако в рассматриваемой постановке множество V возможных значений управления является *выпуклым многогранником* M в R^m, т.е. $V = M$. На многогранник M накладываются дополнительные требования: $0 \in M$ и 0 — не является вершиной M.

Далее примем, что $x(0) = x^0$, а целевая точка x^1 помещена в начало координат, т.е. $x^1 = 0$, таким образом момент времени T определяется моментом первого попадания фазовой траектории в точку ноль: $x(T) = 0$.

Подынтегральная функция f_0 из (2.2) в этих задачах принята равной единице, таким образом

$$J[u] = \int_0^T 1dt = T, \tag{2.31}$$

т.е. значение интегрального функционала совпадает с временем достижения начала координат.

Задача заключается в определении области управляемости X_U, а также в выборе допустимого управления, обеспечивающего переход системы из состояния x^0, принадлежащего области управляемости, в 0 за минимальное конечное время:

$$\min_{\substack{u \in D(M) \\ x^0 \to 0 \\ \text{за конечное время}}} T[u]. \tag{2.32}$$

Оказывается, что в задачах такого вида принцип максимума принимает наиболее простую форму. Более того, при выполнении дополнительного *условия общности положения* принцип максимума становится не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности управления.

Определение. Говорят, что задачи (2.30)-(2.32) удовлетворяет *условию общности положения*, если для любого вектора ω, параллельного какому-либо ребру многогранника M, система векторов

$$B\omega, AB\omega, \ldots, A^{n-1}B\omega \tag{2.33}$$

— линейно независима.

Заметим, что в случае линейной зависимости в одном из наборов (2.33) для некоторого ω эту зависимость можно разрушить сколь угодно малыми изменениями элементов матриц A, B или координат вершин многогранника M.

Таким образом, при соответствующем кодировании линейных задач на оптимальное быстродействие точками в многомерном пространстве параметров, можно сказать, что задачи с нарушением общности положения образуют в этом пространстве множество нулевой меры.

2.4.2. Принцип максимума и структура оптимального управления

Теорема (принцип максимума в линейных задачах на оптимальное быстродействие)**.** *Для того, чтобы в линейной задаче на оптимальное быстродействие* (2.30)-(2.32) *допустимое управление $u = u^* \in D(M)$, переводящее $x^0 \in X_U$ в точку 0 за конечное время, было оптимальным необходимо и почти всегда (при выполнении условия общности положения) достаточно, чтобы:*

1. *$\exists$ нетривиальное решение $\psi = \psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t))^T \neq 0$ системы*

$$\dot{\psi} = -A^T\psi, \tag{2.34}$$

при котором выполняется:

2. $\forall t \in [0, T]$
$$(\psi^*(t))^T B u^*(t) = \max_{v \in M} (\psi^*(t))^T B v. \qquad (2.35)$$

Доказательство. Обоснование достаточности условий 1 и 2 в данном учебном пособии не приводится. Его можно найти в [11]. Необходимость докажем, опираясь на теорему о принципе максимума для задачи общего вида, рассмотренной в разделе 2.3.

Используя вместо ранее введенного в этой теореме обозначения $\bar{\psi}$ обозначение
$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^T,$$
запишем вид функции Гамильтона:
$$H(\psi_0, \psi, x, u) = \psi_0 \cdot 1 + \psi^T A x + \psi^T B u. \qquad (2.36)$$

Тогда система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных ψ примет вид (2.34), не зависящий от $u^*(t)$ и $x^*(t)$.

Поскольку два первых члена в правой части выражения (2.36) не зависят от управления, то условие максимума в (2.25) примет более простую форму (2.35).

Рассмотрим условие (2.26):
$$\begin{aligned} 0 &= H(\psi_0^*, \psi^*(T), x^*(T), u^*(T)) = \\ &= \psi_0^* + (\psi^*(T))^T A \underbrace{x^*(T)}_{=0} + (\psi^*(T))^T B u^*(T) = \psi_0^* + \max_{v \in M} (\psi^*(T))^T B v. \end{aligned}$$

Таким образом, константа ψ_0^* должна быть выбрана так:
$$\psi_0^* = -\max_{v \in M} (\psi^*(T))^T B v.$$

Поскольку $0 \in M$, то значение максимума больше или равно нулю, следовательно, будет выполнено требование на знак $\psi_0^* \leqslant 0$.

Таким образом, требование существования константы ψ_0^*, имеющей неположительное значение соответствующее остальным требованиям общей теоремы о принципе максимума автоматически выполняется в линейных задачах на оптимальное быстродействие.

Теперь выясним, почему требование $(\psi_0^*, \psi^*(t))^T \neq 0$ общей теоремы оказалось заменено требованием $\psi^*(t) \neq 0$ в рассматриваемой задаче.

Предположим, что в линейной задаче на оптимальное быстродействие для некоторого момента времени $\tilde{t}$ значение $\psi^*(\tilde{t}) = 0$. Поскольку $\psi(t) \equiv 0$ является одним из решений системы (2.34) и при заданных начальных условиях её решение единственно, то при сделанном предположении $\psi^*(t) \equiv 0$. Но тогда из вида (2.36) следует, что
$$H(\psi_0^*, \psi^*(T), x^*(T), u^*(T)) = \psi_0^*,$$

и из (2.26) получаем $\psi_0^* = 0$.

Таким образом, в рассматриваемых задачах предположение $\psi^*(\tilde{t}) = 0$ влечет $(\psi_0^*, \psi^*(t)) \equiv 0$, что противоречит общей теореме о принципе максимума. Следовательно, $\psi^*(t) \neq 0 \ \forall t \in [0, T]$.

Покажем теперь справедливость (2.27), т.е. свойства постоянства функции Гамильтона на оптимальных значениях $x^*(t)$ и $u^*(t)$, выяснив одновременно структуру оптимального управления.

Поскольку $\psi_0^* = const$, то нужно обосновать постоянство по t функции

$$C(t) = (\psi^*(t))^T A x^*(t) + (\psi^*(t))^T B u^*(t). \tag{2.37}$$

Введем новую переменную $w = Bu$, которую можно трактовать как управляющее воздействие в (2.30). Пусть $w^*(t) = Bu^*(t)$ и $\tilde{M} = B \cdot M$. Т.е. $\tilde{M}$ является B–образом многогранника M.

В новых обозначениях условие максимума (2.35) примет вид

$$(\psi^*(t), w^*(t)) = \max_{w \in \tilde{M}} (\psi^*(t), w). \tag{2.38}$$

Из (2.38) следует, что оптимальному значению $w^*(t)$ соответствует тот вектор из многогранника $\tilde{M}$ (заметим, что $0 \in \tilde{M}$), который имеет максимальную проекцию на направление $\psi^*(t)$ (см. рис. 2.4).

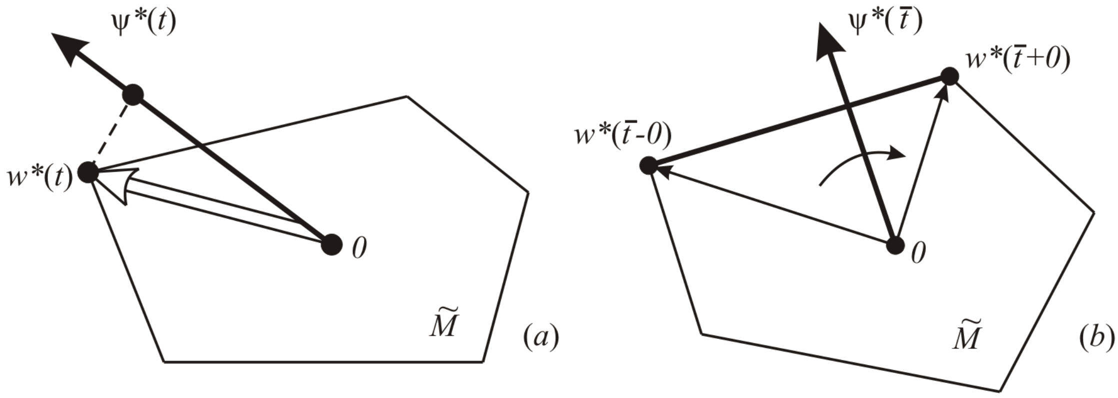

Рис. 2.4. (a)–оптимальное управляющее воздействие $w^*(t)$; (b)–скачкообразное изменение оптимального значения w^* в момент $\bar{t}$ ортогональности $\psi^*(t)$ грани $\tilde{M}$

Задача (2.38) выбора значения $w^*(t)$ при фиксированном t является задачей линейного программирования. В общем случае, кроме ситуаций ортогональности вектора $\psi^*(t)$ одной из граней $\tilde{M}$, она имеет единственное решение, когда максимум в (2.37) достигается в одной из вершин (рис. 2.4а). В моменты ортогональности $\psi^*(t)$ одной из граней максимум достигается во всех точках w, принадлежащих соответствующей грани. В частности, и в этом случае можно выбирать значение w^* в одной из вершин грани, если ортогональность имеет место лишь в отдельные моменты времени, а не на промежутках. Разрывы непрерывности $w^*(t)$ могут происходить лишь в моменты времени $\bar{t}$, соответствующие ортогональности вектора $\psi^*(\bar{t})$ одной из граней.

Таким образом, если ортогональность $\psi^*(t)$ граням многогранника $\tilde{M}$ возможна лишь в отдельные моменты времени, оптимальное управляющее воздействие $w^*(t)$ может быть выбрано в классе кусочно-постоянных функций, принимающих значения на множестве вершин $\tilde{M}$. В этом случае управление $u^*(t)$ также будет кусочно-постоянным. Поскольку в точках $\bar{t}$ разрыва управления скалярное произведение

$$(\psi^*(\bar{t}), w^*(\bar{t}+0) - w^*(\bar{t}-0)) = 0,$$

(см. рис. 2.4b), а функции $x^*(t)$ и $\psi^*(t)$ в (2.37) заведомо непрерывны, выражение $C(t)$ в (2.37) будет принимать одинаковые значения справа и слева от точки разрыва управления:

$$C(\bar{t}+0) = C(\bar{t}-0).$$

Осталось проверить постоянство этого выражения на участках постоянства управления $u^*(t)$. Итак, пусть в окрестности значения t управление $u^*(t)$ постоянно. Тогда $\dot{u}^*(t) = 0$. Следовательно,

$$\dot{C}(t) = (\dot{\psi}^*(t))^T (Ax^*(t) + Bu^*(t)) + (\psi^*(t))^T (A\dot{x}^*(t) + 0) =$$
$$= -(\psi^*(t))^T A\dot{x}^*(t) + (\psi^*(t))^T A\dot{x}^*(t) = 0,$$

что означает постоянство $C(t)$ на участках постоянства $u^*(t)$.

Теорема доказана. □

2.4.3. Содержательная трактовка условия максимума

Условие максимума (2.35) после введения управляющего воздействия $w(t) = Bu(t)$, с уравнением динамики

$$\dot{x} = Ax + w(t) \tag{2.39}$$

приобретает форму (2.38).

В этом уравнении вектор фазовой скорости собственной динамики объекта (2.39) определяется на оптимальной траектории произведением $Ax^*(t)$, а $w = w^*(t)$ есть управляющее воздействие, обеспечивающее добавочную фазовую скорость.

Вектор $\psi^*(t)$ в (2.38), в силу (2.12), пропорционален вектору антиградиента функции Беллмана (т. е. функции оптимальных затрат), вычисленной в точке текущего состояния динамической системы на оптимальной траектории. Таким образом, в фазовом пространстве для точек $x = x^*(t)$ оптимальной траектории вектор $\psi^*(t)$ определяет направление скорейшего локального убывания функции оптимальных затрат по переходу из текущей точки $x^*(t)$ в заданную целевую точку $x^1 = 0$.

Вывод. *Условия* (2.35) *и* (2.38) *показывают, что оптимальное воздействие* $w^*(t)$ *должно выбираться как такое допустимое в пределах* $\widetilde{M}$ *приращение фазовой скорости, которое обеспечивает наибольшую проекцию полной фазовой скорости объекта на направление* $\psi^*(t)$, *— направление скорейшего локального убывания оптимальных затрат.*

2.5. Обобщения принципа максимума на другие постановки задач оптимального управления

2.5.1. Задачи с фиксированным временем достижения целевой точки

При прежних требованиях к функциям $f_i(x,u)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, а также к допустимым управлениям рассмотрим задачу вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x, u(t)), \\ (i = 1, \ldots, n), \end{cases} \tag{2.40}$$

где $x(0) = x^0$, $u \in D(V)$, $x(T_0) = x^1$. В отличие от обычной постановки (2.1)-(2.3) считаются заданными не только целевая точка x^1, но и значение времени ее достижения $T = T_0 > 0$. Требуется для функционала

$$\tilde{J}[u] = \int_0^{T_0} f_0(x(t), u(t))dt \tag{2.41}$$

и заданной начальной точки $x^0 \in X_U$ определить оптимальное управление $u^* \in D(V)$:

$$\tilde{J}[u^*] = \min_{\substack{u \in D(V) \\ x^0 \to x^1 \\ \text{за время } T = T_0}} \tilde{J}[u]. \tag{2.42}$$

Сведем задачу с фиксированным $T = T_0$ к задаче с нефиксированным T. Для этого расширим фазовое пространство, введя дополнительную переменную $x_{n+1} \equiv t$.

Соответствующее дополнительное дифференциальное уравнение для нее примет вид

$$\dot{x}_{n+1} = 1, \tag{2.43}$$

с начальным условием $x_{n+1}(0) = 0$.

В расширенном пространстве $\bar{x} = (x^T; x_{n+1})^T$ начальные условия примут вид $\bar{x}(0) = ((x^0)^T; 0)^T$, а конечное условие:

$$\bar{x}(T) = ((x^1)^T; T_0)^T. \tag{2.44}$$

В условии (2.44) принимается, что значение $T \geqslant 0$ конечно, но заранее не определено. В то же время выполнение (2.44) возможно только при $T = T_0$. Поэтому, если ввести функционал

$$J[u] = \int_0^T \bar{f}_0(\bar{x}(t), u(t))dt = \int_0^T f_0(x(t), u(t))dt, \tag{2.45}$$

где T определяется лишь условием первого выполнения равенства в (2.44), то задача минимизации этого функционала будет эквивалентна исходной задаче (2.42) с заданным значением $T = T_0$.

Поскольку эквивалентная задача в расширенном пространстве полностью соответствует по своей структуре первоначальной общей постановке (2.1)-(2.3), то для нее необходимые условия оптимальности управления определяются первой общей теоремой о принципе максимума. Рассмотрим эти условия.

Поскольку в (2.43) $f_{n+1}(x, u) \equiv 1$, то $\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_j} \equiv 0$ для $j = 1, \ldots, n$, то уравнения (2.24) для сопряженных переменных ψ_j, $(j = 1, \ldots, n)$ не изменяется. В то же время,

$$\dot{\psi}_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n+1} \psi_i \frac{\partial f_i(x^*(t), u^*(t))}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

т.к. $f_i(x, u)$ не зависят от $x_{n+1} \equiv t$. Следовательно, $\psi_{n+1} = const$.

В расширенном пространстве x, x_{n+1} новая функция Гамильтона

$$H_{\text{нов}}(\psi, \psi_{n+1}, x, x_{n+1}, u) = H(\psi, x, u) + \psi_{n+1} \cdot 1. \tag{2.46}$$

За счет добавленной в (2.46) константы ψ_{n+1}, знак которой может быть любым, условие (2.26) для новой функции Гамильтона всегда будет выполнено и поэтому становится ненужным. В условии максимума (2.25) произойдет сокращение константы ψ_{n+1} слева и справа, после чего оно примет обычный вид (2.25) по отношению к старой функции Гамильтона $H(\psi, x, u)$.

Приходим к следующему результату.

Теорема (обобщение принципа максимума на задачи с фиксированным временем достижения). *Для указанного типа задач применима общая форма теоремы о принципе максимума, из формулировки которой следует исключить требование* (2.26) *обращения в ноль максимального значения функции Гамильтона.*

Доказательство приведено перед формулировкой теоремы.

2.5.2. Неавтономные задачи

Постановка этих задач полностью повторяет постановку (2.1)-(2.3) с тем лишь различием, что правые части системы дифференциальных уравнений объекта и подынтегральная функция явно зависят от времени:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x, u(t), t); \\ (i = 1, \dots, n), \end{cases} \tag{2.47}$$

и

$$J[u] = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt. \tag{2.48}$$

Теорема (обобщение принципа максимума на неавтономный случай)**.** *Для неавтономной задачи применима общая форма теоремы о принципе максимума с заменой в* (2.25) *прежней функции Гамильтона неавтономной функцией вида*

$$H(\psi, x, t, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x, u, t), \tag{2.49}$$

а также заменой условия (2.26) *условием*

$$H(\psi^*(t), x^*(t), t, u^*(t)) = -\int_{t}^{T} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \tau}(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau) \cdot \psi_i(\tau)d\tau, \tag{2.50}$$

которое должно выполняться для $t \in [t_0, T]$*, откуда следует, что функция Гамильтона перестает быть постоянной при указанных аргументах.*

Доказательство. Используем тот же прием, что и в п.2.5.1, а именно, введем новую фазовую переменную $x_{n+1} \equiv t$, для которой справедливо (2.43) с начальным условием $x_{n+1}(t_0) = t_0$.

Повторяя рассуждения, приведенные в п.2.5.1, как и в предыдущем случае получим, что система дифференциальных уравнений (2.24) для сопряженных переменных $\psi_1, \dots, \psi_n$ не изменится, и

$$H_{\text{нов}}(\psi, \psi_{n+1}, x, t, u) = H(\psi, x, t, u) + \psi_{n+1} \cdot 1, \tag{2.51}$$

что приведет к сохранению условия максимума (2.25) по отношению к функции Гамильтона вида (2.49).

Осталось рассмотреть изменения в (2.26). Исходя из вида (2.51), получим, что в условии (2.26), которое теперь нужно рассматривать для произвольного $t \in [t_0, T]$, в правой части вместо нуля должно стоять значение $(-\psi^*_{n+1}(t))$.

Определим его вид. По общим правилам запишем дифференциальное уравнение для $\psi^*_{n+1}(t)$ с учетом (2.51):

$$\dot{\psi}_{n+1} = -\frac{\partial H_{\text{нов}}}{\partial t}(\psi^*(t), \psi_{n+1}, x^*(t), t, u^*(t)) = -\frac{\partial H}{\partial t}(\psi^*(t), x^*(t), t, u^*(t)) = \\ = -\sum_{i=0}^{n} \psi^*_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial t}(x^*(t), u^*(t), t). \quad (2.52)$$

Для получения $\psi_{n+1}(t)$ необходимо определить краевое условие для $\psi_{n+1}(T)$. Целевому условию $x(T) = x^1$ в исходной задаче в расширенном фазовом пространстве $\bar{x} \in R^{n+1}$ соответствует попадание фазовой точки $\bar{x}(T)$ на прямую: $x(T) = x^1$, x_{n+1} — любое. В точках этой прямой значение функции Беллмана $S(x, x_{n+1})$, очевидно, равно нулю поэтому при стремлении $\bar{x}$ к этой прямой градиент $\nabla S(\bar{x})$ будет стремиться к положению нормали для этой прямой. Следовательно, в пределе $\frac{\partial S(\bar{x})}{\partial x_{n+1}} = 0$. Однако вектор $(-\nabla S(\bar{x}^*(t)))$ пропорционален и сонаправлен с $(\psi^*(t)^T, \psi^*_{n+1}(t))^T$. Следовательно, $\psi^*_{n+1}(T) = 0$.

Интегрируя уравнение (2.52) на промежутке $[t, T]$ с учетом полученного краевого условия, получим значение $(-\psi^*_{n+1}(t))$, приводящее к требуемому условию (2.50). □

2.5.3. Задачи оптимального управления с подвижными концами, условие трансверсальности

Пусть x — элемент n–мерного эвклидова пространства и

$$h^0(x) = (h^0_1(x), \ldots, h^0_{m_0}(x)),\ h^1(x) = (h^1_1(x), \ldots, h^1_{m_1}(x))$$

— непрерывно дифференцируемые вектор-функции, компоненты которых не имеют стационарных точек на множествах, определяемых условиями $h^j_i(x) = 0$ для каждого из $i = 1, \ldots, m_j$ и $j = 0,\, 1$. Иными словами, на каждом из множеств, где $h^j_i(x) = 0$, нет точек с $\nabla h^j_i(x) = 0$. В этом случае говорят, что каждое из равенств $h^j_i(x) = 0$ определяет *гладкую гиперповерхность.*

Множество X_j, образованное пересечением группы из m_j гладких гиперповерхностей, определяемое векторным равенством $h^j(x) = 0$, называют *гладким многообразием размерности* $(n - m_j)$, если в точках $x \in X_j$ ранг матриц Якоби вида

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h^j_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h^j_1(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial h^j_1(x)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial h^j_{m_j}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h^j_{m_j}(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial h^j_{m_j}(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

равен m_j. Это требование эквивалентно тому, что в точках $x \in X_j$ системы градиентов $\nabla h_1^j(x), \ldots, \nabla h_{m_j}^j(x)$ линейно независимы, что обеспечивает регулярность данных множеств.

Пусть заданы два гладких многообразия X_0 и X_1 размерности $0 < m_0 < n$ и $0 < m_1 < n$. Рассмотрим задачу оптимального управления вида (2.1)-(2.3), в которой значения $x(0) = x^0$ и $x(T) = x^1$ считаются не заданными, а произвольно размеженными на двух заданных гладких многообразиях $x^0 \in X_0$, $x^1 \in X_1$. Ставится задача определения оптимального управления u^* из (2.3), минимизирующего функционал (2.2) при дополнительных условиях $x^0 \in X_0$ и $x^1 \in X_1$ (см. рис. 2.5). Таким образом, кроме u^* должно быть дополнительно найдено оптимальное положение точек $x^0 = x_*^0$ и $x^1 = x_*^1$ на этих гладких многообразиях.

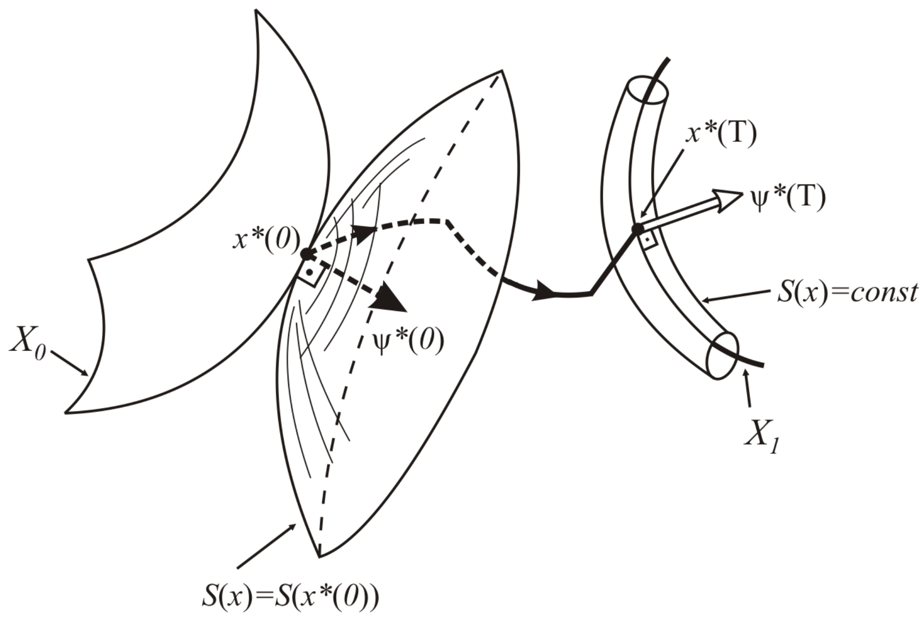

Рис. 2.5. Поведение поверхностей равного уровня функции Беллмана в окрестности оптимальных граничных точек и условия трансверсальности ($m_0 = 2$, $m_1 = 1$)

Поскольку управление $u^*(t)$, оптимальное в такой задаче, будет также являться оптимальным управлением в задаче с фиксированными концами при выполнении граничных условий $x(0) = x_*^0$ и $x(T) = x_*^1$, то это управление $u^*(t)$ должно удовлетворять обычным условиям общей теоремы о принципе максимума из раздела 2.3. Однако для определения $n+n$ координат точек x_*^0, x_*^1 нужно получить такое же количество дополнительных условий. Заметим, что требование $x_*^0 \in X_0$ и $x_*^1 \in X_1$ обеспечивают m_0 и m_1 дополнительных условий $h_i^j(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, m_j)$, $(j = 0, 1)$. Нужно найти еще $n - m_0$ и $n - m_1$ условий.

Опишем на содержательном уровне принцип их получения. Рассмотрим функцию Беллмана

$$S(x) = \min_{\substack{u \in D(V) \\ x \to X_1 \\ \text{за конечное время}}} J[u].$$

Очевидно, что при $x \in X_1$: $S(x) = 0$, таким образом, при стремлении $\tilde{x}$ к многообразию X_1 поверхность равного уровня функции $S(x) = const$, проходящая через точку $\tilde{x}$ будет «влипать» в многообразие X_1 (см. рис. 2.5). Следовательно, для $x^1 \in X_1$ вектор $\nabla S(x^1)$ будет локально ортогонален этому многообразию в точке x^1, что означает $\exists \mu^1 = (\mu_1^1, \ldots, \mu_{m_1}^1)$ при которых

$$-\nabla S(x^1) = \sum_{i=1}^{m_1} \mu_i^1 \nabla h_i^1(x^1).$$

Кроме того, $S(x)$ на многообразии $x \in X_0$ достигает минимума в точке $x^*(0)$, следовательно, по теореме Лагранжа $\exists \mu^0 = (\mu_1^0, \ldots, \mu_{m_1}^0)$ при которых

$$-\nabla S(x^*(0)) = \sum_{i=1}^{m_0} \mu_i^0 \nabla h_i^0(x^*(0)),$$

что означает локальную ортогональность $\nabla S(x^*(0))$ многообразию X_0. Поскольку вектор $(-\nabla S(x^*(t)))$ пропорционален $\psi^*(t)$, получаем следующие *условия трансверсальности*: $\psi^*(0)$ локально ортогонален X_0 в точке $x^*(0)$, а $\psi^*(T)$ локально ортогонален X_1 в точке $x^*(T)$ (см.рис.2.5), что означает

$$\exists \mu_1^0, \ldots, \mu_{m_1}^0 : \ \psi^*(0) = \sum_{i=1}^{m_0} \mu_i^0 \nabla h_i^0(x^*(0)), \tag{2.53}$$

$$\exists \mu_1^1, \ldots, \mu_{m_1}^1 : \ \psi^*(T) = \sum_{i=1}^{m_1} \mu_i^1 \nabla h_i^1(x^*(T)). \tag{2.54}$$

Условия (2.53) и (2.54) дают $n+n$ дополнительных уравнений и одновременно добавляют по m_0 и m_1 дополнительных неизвестных, что в совокупности после исключения этих неизвестных равносильно появлению $n - m_0$ и $n - m_1$ дополнительных связей, что и требовалось.

Список литературы

1. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. — Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет, 2018. — 219 с. – [Электронная версия: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy/].
2. Методы оптимизации в примерах и задачах / Бирюков Р.С., Григорьева С.А., Городецкий С.Ю., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. — Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет, 2010. — 100 с. – [Электронная версия: http://www.itmm. unn.ru/tuds/obuchenie/materialy/].
3. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.1. — М.: Высшая школа, 1966.
5. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. — М.: Физматлит, 1961.
6. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. — М.,Л.: Гостехиздат. 1950.
7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.
8. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление./ Изд. стереотипное.— М.: Изд. группа URSS, 2014.
9. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. — М.: Наука, 1973.
10. EqWorld. Мир математических уравнений / Главн.ред. А.Д. Полянин. — М.: ИПМ РАН, 2004-2014. — [Электронный ресурс, содержащий электронные версии книг по вариационному исчислению в свободном доступе: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm].
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — 4-ое изд. — М: Наука, 1983.
12. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. — Изд. 2, перераб. и доп. — М: Наука, 1969.

Оглавление

Станислав Юрьевич **Городецкий**

ЛЕКЦИИ ПО МЕТОДАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23